

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES D'ERRACHIDIA



Département de physique

## TRAVAUX DIRIGES DE

# MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL & OPTIQUE GÉOMÉTIQUE

Licence En Sciences et Techniques

MIP SI-Module P112

Année Universitaire 2020-2021

Pr. Abdelmajid DAYA

## MECANIQUE DU POINT MATERIEL

### Série N° 1 : Cinématique

#### Exercice 1

Dans le plan  $(X OY)$  d'un repère  $\mathcal{R}(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$ , un point matériel  $M$  se déplace de telle sorte que son vecteur position soit donné par :

$$\vec{OM} = r_0 (1 - \cos \omega t) \vec{e}_x + r_0 (1 + \sin \omega t) \vec{e}_y$$

$r_0$  et  $\omega$  sont des constantes positives

1. Donner l'équation de la trajectoire du point  $M$ .
2. Quelle est la nature du mouvement du point  $M$ ?
3. Déterminer les expressions du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ .
4. Donner les expressions des normes de la vitesse et de l'accélération.
5. A quel instant le vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  du point  $M$  est perpendiculaire à  $\vec{OM}$ .

#### Exercice 2

On considère le mouvement d'un point matériel  $M$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t))$ .

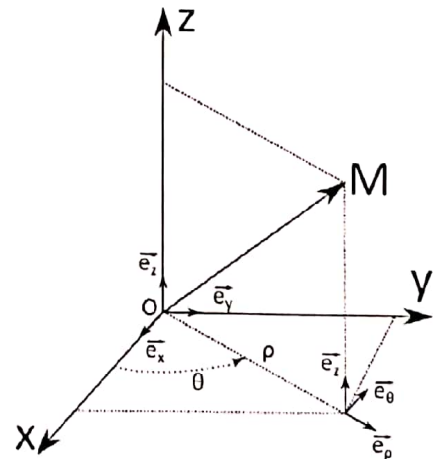
Les coordonnées du point sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = a\theta(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = a\theta(t)\sin\theta(t) \\ z(t) = b\theta(t) \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes. On pose  $\ddot{\theta} = \alpha = \text{cste}$ .

A l'instant  $t = 0$ ,  $\theta(t = 0) = 0$  et  $\dot{\theta}(t = 0) = 0$ .

Les composantes du mouvement seront exprimées dans la base cylindrique  $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  sauf la question 1.



1. Exprimer  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\theta$  en fonction de  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$ .
2. Déterminer  $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$  et  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$  dans la base cylindrique à partir des expressions trouvées en 1.
3. Utiliser une autre méthode pour trouver  $\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$  et  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$  ?
4. Donner l'expression de  $\theta(t)$  en fonction de  $\alpha$ .
5. Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  en fonction de  $a, b, \alpha$  et du temps  $t$ .
6. Déterminer le vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  en fonction de  $a, b, \alpha$  et du temps  $t$ .

A. Daya

### Exercice 3

Dans le plan  $(XOY)$  d'un repère  $\mathcal{R}(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z))$ , le mouvement d'un point  $M$  est décrit par la position de ses coordonnées polaires en fonction du temps  $t$  :

$$\rho(t) = b e^{\omega t} \text{ et } \theta = \omega t, \text{ où } b \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives}$$

1. Déterminer les expressions du vecteur position  $\vec{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  en coordonnées polaires  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ .
2. Donner les expressions des **normes** de la vitesse et de l'accélération.
3. Exprimer les vecteurs unitaires tangent  $\vec{e}_T$  et normal  $\vec{e}_N$  de la base de Frenet en coordonnées polaires  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$ .
4. Donner les composantes de l'accélération tangentielle  $a_T$  et normale  $a_N$ .
5. Donner l'expression du rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire au point  $M$ .
6. Donner l'expression de la distance  $l(t)$  parcourue par le point  $M$  entre les instants  $t = 0$  et  $t$ . ( $l(t) = s(t) - s(0)$  avec  $s(t)$  est l'abscisse curviligne du point  $M$  à l'instant  $t$ ).
7. Exprimer en fonction de  $\theta$  l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  en coordonnées cartésiennes  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

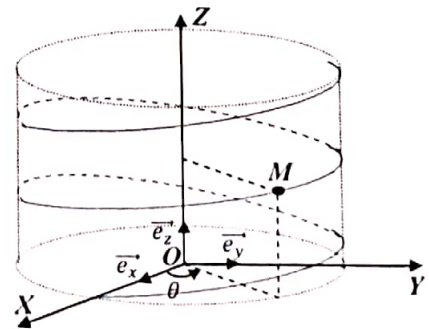
### Exercice 4

Le mouvement hélicoïdal se décompose en un **mouvement circulaire** et un **mouvement de translation**. Dans notre cas, le mouvement circulaire est dans le plan  $(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y))$  et le mouvement de translation selon l'axe  $z$ . Les équations horaires sont données par :

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \theta(t) \\ y(t) = R \sin \theta(t) \\ z(t) = 2R(1 - \theta(t)) \end{cases}$$

Avec  $R$  le rayon associé au mouvement circulaire, la vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  constante.

On étudie le mouvement du point  $M$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O; (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, t))$ , d'abord dans la base cartésienne  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  puis dans la base cylindrique  $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .



1. Exprimer, dans la base cartésienne  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , la vitesse et l'accélération du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . En déduire les normes de ces vecteurs.
2. Exprimer, dans la base cylindrique  $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ , la vitesse et l'accélération du point  $M$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . En déduire les normes de ces vecteurs.
3. Exprimer les vecteurs unitaires tangent  $\vec{e}_T$  et normal  $\vec{e}_N$  de la **base de Frenet** dans la base cylindrique  $(O; (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$ .
4. Donner les composantes de l'accélération tangentielle  $a_T$  et normale  $a_N$ .
5. En déduire le **rayon de courbure**  $R_C$  de la trajectoire.



CINEMATIQUEExercice 1

- ① En Coordonnée Cartésienne, la position du point M

$$\vec{OM} = r_0(1 - \cos \omega t) \vec{e}_x + r_0(1 - \sin \omega t) \vec{e}_y$$

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

Par identification

$$\begin{cases} x = r_0(1 - \cos \omega t) \\ y = r_0(1 - \sin \omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - r_0 = -r_0 \cos \omega t \\ y - r_0 = -r_0 \sin \omega t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[ (x - r_0)^2 + (y - r_0)^2 = r_0^2 \right] \text{ équation de la trajectoire du point M}$$

- ② La trajectoire est un cercle de centre  $C(r_0, r_0)$  et de rayon  $R = r_0$

- ③ La vitesse du point M :  $\vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{OM} / R$
- $$\vec{V}(M/R) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y = r_0 \omega (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y)$$

$$\left[ \vec{V}(M/R) = r_0 \omega (\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y) \right]$$

- L'accélération du point M :  $\vec{a}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{V}(M/R) / R$

$$\vec{a}(M/R) = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y$$

$$\left[ \vec{a}(M/R) = -r_0 \omega^2 (\cos \omega t \vec{e}_x + \sin \omega t \vec{e}_y) \right]$$

- ④  $\left[ \|\vec{V}(M/R)\| = r_0 \omega \right]$  et  $\left[ \|\vec{a}(M/R)\| = r_0 \omega^2 \right]$
- (1)



$$\textcircled{5} \cdot \vec{V}(m/R) \perp \vec{OM} \Rightarrow \vec{V}(m/R) \cdot \vec{OM} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} r\omega \sin \omega t & r\omega(1 - \cos \omega t) \\ -r\omega \cos \omega t & r\omega(1 - \sin \omega t) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow r\omega^2 [\sin \omega t (1 - \cos \omega t) - \cos \omega t (1 - \sin \omega t)] = 0$$

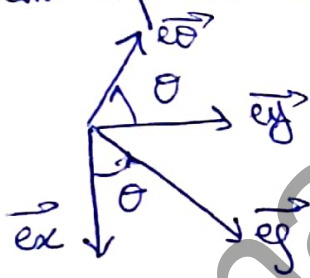
$$\Rightarrow \sin \omega t - \cos \omega t = 0$$

$$\Rightarrow \lg \omega t = 1 = \lg \pi/4$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \pi/4\omega}$$

## Exercice 2

$\textcircled{1}$  Dans le plan XOY



$$\begin{cases} \vec{e}_y' = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_x' = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \cdot \frac{d\vec{e}_y'}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_y) \text{ base fixe}$$

$$\frac{d\vec{e}_y'}{dt} = \frac{d}{dt} \cos \theta \vec{e}_x + \frac{d}{dt} \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{e}_y'}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{e}_y'}{dt} = \dot{\theta} [-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y] = \dot{\theta} \vec{e}_x'$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_y'}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_x'}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{d\vec{e}_x'}{dt} &= \frac{d}{dt} [-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y] \\ \frac{d\vec{e}_x'}{dt} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

A. Doya

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y) = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\left[ \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \right]$$

③ on utilise la relation d'un vecteur à norme constante  
càd  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ .

$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z$ , la base directe  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\bullet \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\bullet \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

d'où  $\left[ \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r \right]$

④ on a  $\ddot{\theta} = \alpha \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$   
 $\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \alpha t + c_1$

à  $t=0 \rightarrow \theta(t=0) = c_1 = 0$

$\Rightarrow \dot{\theta}(t) = \alpha t$

$\Rightarrow \theta(t) = \frac{\alpha t^2}{2} + c_2$

à  $t=0, \theta(t=0) = c_2 = 0$

d'où  $\left[ \theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 \right]$

⑤ l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \rightarrow$  position

$\vec{V}(M)(R) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$

$\vec{OM} = \begin{cases} x = a \theta \cos\theta \\ y = a \theta \sin\theta \\ z = b \theta \end{cases}$

$x^2 + y^2 = r^2 = a^2 \theta^2$

$\Downarrow$   
 $\left[ r = a \theta \right]$

A Daya  
 ③

En coordonnée cylindrique, la vitesse est donnée par

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z.$$

$$\text{or } \rho = a\theta = \frac{a\alpha}{2}t^2 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\dot{\rho} = a\dot{\theta} = a\alpha t$$

$$\dot{\theta} = \alpha t$$

$$\ddot{\rho} = a\ddot{\theta} = a\alpha.$$

$$\ddot{\theta} = \alpha.$$

donc 
$$\vec{V}(M/R) = a\alpha t \vec{e}_\rho + a\frac{\alpha^2}{2}t^3 \vec{e}_\theta + b\alpha t \vec{e}_z$$

⑥ En coordonnée cylindrique, l'accélération est donnée par:

$$\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z.$$

$$\vec{a}(M/R) = \left(a\alpha - \frac{a\alpha}{2}t^2(\alpha t)^2\right) \vec{e}_\rho + \left(2a\alpha t \cdot \alpha t + \frac{a\alpha}{2}t^2 \cdot \alpha\right) \vec{e}_\theta + b\alpha \vec{e}_z$$

donc 
$$\vec{a}(M/R) = \left[a\alpha - \frac{a\alpha^3}{2}t^4\right] \vec{e}_\rho + \frac{5}{2}a\alpha^2 t^2 \vec{e}_\theta + b\alpha \vec{e}_z$$

### Exercice 3

① En coordonnée polaire, les vecteurs :

• position :  $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

• vitesse :  $\vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

• accélération :  $\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$

et  $\rho = be^{\omega t} \rightarrow \dot{\rho} = b\omega e^{\omega t} \rightarrow \ddot{\rho} = b\omega^2 e^{\omega t}$   
 $\theta = \omega t \rightarrow \dot{\theta} = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$

A. Daya

④



donc :

$$\begin{cases} \vec{OM} = b e^{i\omega t} \\ \vec{V}(M/R) = b \omega e^{i\omega t} (\vec{e}_y + \vec{e}_\theta) \\ \vec{a}(M/R) = 2b\omega^2 e^{i\omega t} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

2°

- $\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{2} b \omega e^{\omega t}$
- $\|\vec{a}(M/R)\| = 2b\omega^2 e^{\omega t}$

3°

- $\vec{e}_T = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{b\omega e^{i\omega t} (\vec{e}_y + \vec{e}_\theta)}{\sqrt{2} b \omega e^{\omega t}}$

donc  $\left[ \vec{e}_T = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_y + \vec{e}_\theta) \right]$

- $\vec{e}_N = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right\|} \text{ or } \frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\omega \vec{e}_y + \omega \vec{e}_\theta)$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_y + \vec{e}_\theta) \text{ et } \left\| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right\| = \omega$$

donc  $\left[ \vec{e}_N = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_y + \vec{e}_\theta) \right]$

4°

- $a_T = \frac{d}{dt} \|\vec{V}(M/R)\| \rightarrow \left[ a_T = \sqrt{2} b \omega^2 e^{\omega t} \right]$

- $\vec{a}(M/R) = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N$

$$\Rightarrow a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

or  $a^2(M/R) = 4b^2\omega^4 e^{2\omega t}$

$$a_T^2 = 2b^2\omega^4 e^{2\omega t} \Rightarrow \left[ a_N = \sqrt{2} b \omega^2 e^{\omega t} \right]$$

A. Doya (5)

$$\textcircled{5} \cdot R_c = \frac{V^2(m/R)}{a_N} = \frac{2b^2\omega^2 e^{2\omega t}}{\sqrt{2}b\omega^2 e^{\omega t}}$$

$$\boxed{R_c = \sqrt{2}b e^{\omega t}}$$

$$\textcircled{6} \cdot \frac{ds}{dt} = \|V(m/R)\| = \sqrt{2}b\omega e^{\omega t}$$

$$ds = \sqrt{2}b\omega e^{\omega t} dt$$

$$l(t) = \int_0^t ds = s(t) - s(0) = \sqrt{2}b\omega \int_0^t e^{\omega t} dt$$

$$\text{donc} \quad \boxed{l(t) = \sqrt{2}b(e^{\omega t} - 1)}$$

$$\textcircled{7} \text{ on a : } \vec{V}(m/R) = b\omega e^{\omega t} (\vec{e}_\varphi + \vec{e}_\theta)$$

$$\text{et } \vec{a}(m/R) = 2b\omega^2 e^{\omega t} \vec{e}_\theta$$

$$\text{on sait que } \vec{e}_\varphi = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{V}(m/R) &= b\omega e^{\omega t} [(\cos\theta - \sin\theta)\vec{e}_x + (\cos\theta + \sin\theta)\vec{e}_y] \\ \text{et } \vec{a}(m/R) &= 2b\omega^2 e^{\omega t} (-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y) \end{aligned}}$$

### Exercice 4

Les équations horaires d'un hélicoïdal

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 2R(1-\theta) \end{cases}$$

A. Daya

⑥

① Dans la base cartésienne ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ )

• la vitesse  $\vec{V}(M/R) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$

$$\vec{V}(M/R) = -R\omega \sin\theta \vec{e}_x + R\omega \cos\theta \vec{e}_y + 2R(-\omega) \vec{e}_z$$

d'où

$$\vec{V}(M/R) = -R\omega \sin\theta \vec{e}_x + R\omega \cos\theta \vec{e}_y - 2R\omega \vec{e}_z$$

• l'accélération  $\vec{a}(M/R) = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$

d'où  $\vec{a}(M/R) = -R\omega^2 \cos\theta \vec{e}_x - R\omega^2 \sin\theta \vec{e}_y$

•  $\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{5} R\omega$

•  $\|\vec{a}(M/R)\| = R\omega^2$

② Dans la base cylindrique ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ )

• le vecteur position  $\vec{OM} = R \vec{e}_r + 2R(1-\theta) \vec{e}_z$

• la vitesse  $\vec{V}(M/R) = R\omega \vec{e}_\theta - 2R\omega \vec{e}_z$

• l'accélération  $\vec{a}(M/R) = -R\omega^2 \vec{e}_r$

•  $\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{5} R\omega$  et •  $\|\vec{a}(M/R)\| = R\omega^2$

③ •  $\vec{e}_T = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{R\omega (\vec{e}_\theta - 2\vec{e}_z)}{\sqrt{5} R\omega}$

$$\vec{e}_T = \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{e}_\theta - 2\vec{e}_z)$$

A. Daya



$$\vec{e}_N = \frac{\frac{d}{dt} \vec{e}_T}{\left\| \frac{d}{dt} \vec{e}_T \right\|} \quad \text{or} \quad \frac{d}{dt} \vec{e}_T = \frac{1}{\sqrt{5}} (-\omega \vec{e}_T)$$

$$\left\| \frac{d}{dt} \vec{e}_T \right\| = \frac{\omega}{\sqrt{5}}$$

donc  $\left[ \vec{e}_N = -\vec{e}_T \right]$

4-  $a_T = \frac{d}{dt} \|\vec{v}(m/R)\| = 0$

$$\text{or } \vec{a} = a_T \vec{e}_T + a_N \vec{e}_N$$

$$\Rightarrow \vec{a} = a_N \vec{e}_N$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}(m/R)\| = a_N = R\omega^2$$

donc  $\left[ a_T = 0 \right] \text{ et } \left[ a_N = R\omega^2 \right]$

5-  $R_c = \frac{\|\vec{v}(m/R)\|^2}{a_N} = \frac{5R^2\omega^2}{R\omega^2}$

$$\left[ R_c = 5R \right]$$

Fin  
A. Doyh

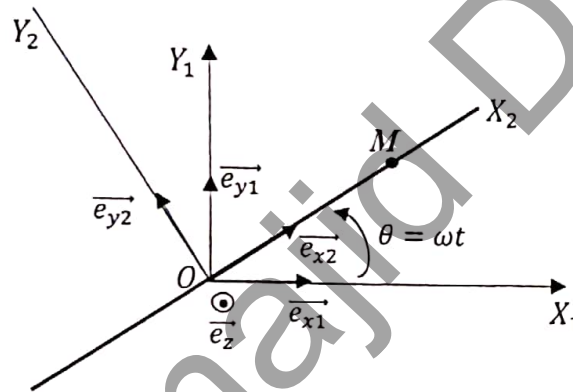
## MECANIQUE DU POINT MATERIEL

### Série N° 2 : Changement de référentiels

A. Dayo

#### Exercice 1

Dans le référentiel fixe  $\mathcal{R}_1(O; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_z)$  une tige ( $OX_2$ ) tourne autour de  $O$  dans le plan  $X_1OY_1$  avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ . On pose  $\theta = (\widehat{OX_1, OX_2})$  avec  $\theta_{(t=0)} = 0$ . Un point matériel  $M$  se déplace sinusoïdalement au cours du temps sur la tige ( $OX_2$ ). L'expression du vecteur position du point  $M$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_2(O; \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_z)$  lié à la tige ( $OX_2$ ) est  $\vec{OM} = r_0 \sin \omega t \vec{e}_{x2}$  ( $r_0$  est une constante positive).



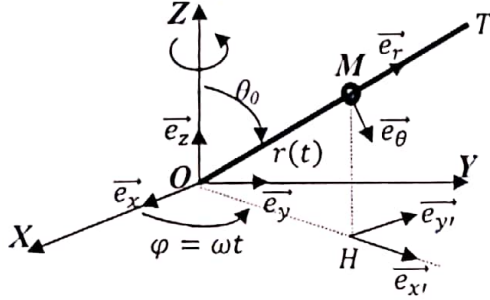
Tous les vecteurs seront exprimés dans la base de projection mobile  $(\vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_z)$

1. Exprimer (en fonction du temps) les vecteurs vitesses du point  $M$ : vitesse relative  $\vec{V}_r(M/\mathcal{R}_2)$ , vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$  et vitesse absolue  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1)$ . Montrer que le module de  $\vec{V}_a$  est constant.
2. Exprimer (en fonction du temps) vitesse absolue  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1)$  par calcul direct.
3. Exprimer (en fonction du temps) les vecteurs accélérations du point  $M$ : accélération relative  $\vec{a}_r(M/\mathcal{R}_2)$ , accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ , accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$  et l'accélération absolue  $\vec{a}_a(M/\mathcal{R}_1)$ . Montrer que le module de  $\vec{a}_a(M/\mathcal{R}_1)$  est constant.
4. Exprimer (en fonction du temps) l'accélération absolue  $\vec{a}_a$  par calcul direct.

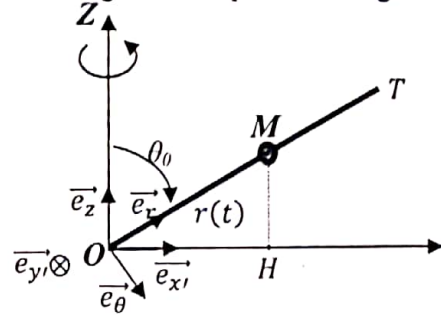
#### Exercice 2

Une masselotte  $M$ , de masse  $m$ , peut coulisser sans frottement sur une tige ( $T$ ). On note  $r(t)$  la distance  $OM$  entre l'extrémité de la tige et la masselotte  $M$  considéré comme ponctuelle. Cette tige, inclinée de l'angle  $\theta_0$  (constant) par rapport à l'axe  $Oz$  du repère d'observation  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , tourne uniformément à la vitesse angulaire  $\dot{\phi} = \omega$  autour de l'axe  $Oz$ .

On note  $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$  le repère orthonormé direct lié à la tige et indiqué sur la figure.



Représentation dans l'espace



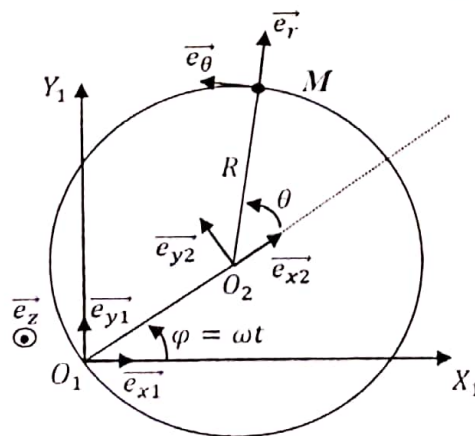
Représentation dans le plan  $(O; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_z)$

1. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est-il en **translation** ou en **rotation** par rapport à  $\mathcal{R}$ ? (si oui donner sa vitesse de l'origine et son vecteur rotation)? Est-il galiléen?
2. Exprimer le vecteur  $\vec{OM}$  en fonction de  $r$  et  $\theta_0$  dans le repère  $\mathcal{R}'(O; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$ .
3. En déduire l'expression de la vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$  et de l'accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R}')$ .
4. Déterminer l'expression de la vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ , de l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$  et de l'accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ .
5. Par application des lois de composition des mouvements, donner les expressions de la vitesse absolue  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R})$  et de l'accélération absolue  $\vec{a}_a(M/\mathcal{R})$ .

### Exercice 3

Soit  $\mathcal{R}_1$  un référentiel galiléen rapporté à un repère cartésien  $(O_1; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_z)$ . Un cerceau de centre  $O_2$  et de rayon  $R$  tourne autour d'un de ses points  $O_1$  dans le plan **horizontal**  $(O_1; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1})$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . Un petit anneau  $M$ , de masse  $m$ , glisse sans frottement le long du cerceau.

On étudiera le mouvement de l'anneau  $M$  dans le référentiel mobile  $\mathcal{R}_2(O_2; \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_z)$  lié au cerceau. Dans  $\mathcal{R}_2$ , l'anneau  $M$  est repéré par l'angle  $\theta = (\vec{e}_{x2}, \vec{e}_r)$  voir figure :



1. Le référentiel  $\mathcal{R}_2$  est-il en **translation** par rapport à  $\mathcal{R}_1$  (si oui donner sa vitesse de translation)? Est-il en **rotation** (si oui donner son vecteur rotation)? Est-il galiléen?



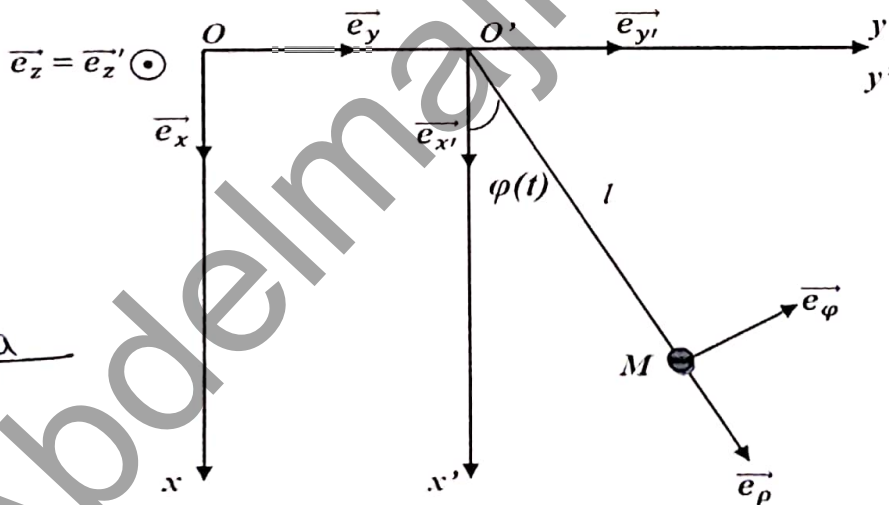
2. Exprimer les vecteurs vitesses du point  $M$  : vitesse relative  $\vec{V}_r(M/\mathcal{R}_2)$ , vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$  et vitesse absolue  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1)$ .
3. Exprimer les vecteurs accélérations du point  $M$  : accélération relative  $\vec{a}_r(M/\mathcal{R}_2)$ , accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ , accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$  et l'accélération absolue  $\vec{a}_a(M/\mathcal{R}_1)$ .

#### Exercice 4

On considère un pendule simple, de longueur  $O'M = l = \text{cte}$ , et de masse  $m$  fixée en  $M$ . A l'aide d'un vibreur, on impose à  $O'$  un mouvement oscillatoire suivant l'axe  $Oy$  du référentiel galiléen lié au laboratoire  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , dont  $Ox$  est la verticale descendante (Figure). On définit le repère  $\mathcal{R}'(O'; \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ , en translation rectiligne suivant  $Oy$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Le pendule tourne sans frottement autour de l'axe  $O'z'$ .

A l'instant  $t = 0$ , les origines des deux repères sont confondues. La position de  $O'$  est définie par  $\vec{OO'} = a \sin(\omega t) \vec{e}_y$  où  $a$  est l'amplitude du mouvement de  $O'$ , et  $\omega$  est la pulsation de l'oscillation. On note  $\varphi(t)$  l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante.

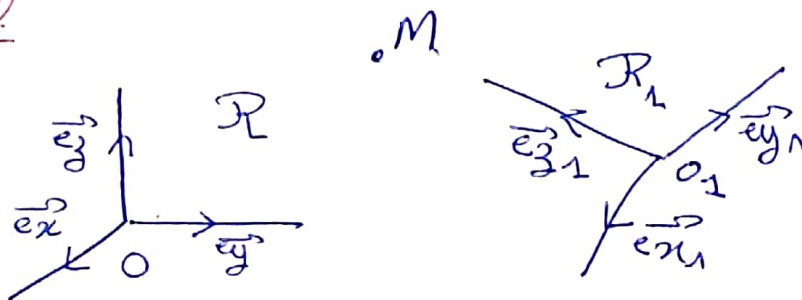
Toutes les expressions des vecteurs seront exprimées dans la base de projection mobile  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$  liée à  $\mathcal{R}'$  en fonction de  $\varphi(t)$  et de ses dérivées temporelles.



1. Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est-il en translation ou en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ ? (si oui donner sa vitesse de l'origine et son vecteur rotation)? Est-il galiléen?
2. Exprimer les vecteurs vitesses du point  $M$  : vitesse relative  $\vec{V}_r(M/\mathcal{R}')$ , vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$  et vitesse absolue  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R})$ .
3. Exprimer les vecteurs accélérations du point  $M$  : accélération relative  $\vec{a}_r(M/\mathcal{R}')$ , accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$ , accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}'/\mathcal{R})$  et l'accélération absolue  $\vec{a}_a(M/\mathcal{R})$ .

CHANGEMENT DE REFERENTIELS

• Rappel



$R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ : référentiel fixe ou absolu

$R_1(O_1, \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_{z1})$ : référentiel mobile ou relatif

\* Loi de composition des vitesses

•  $\vec{V}(M/R) = \vec{V}_a(M) = \frac{d}{dt} \vec{OM} / R$  : vitesse absolue

•  $\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}_r(M) = \frac{d}{dt} \vec{O_1M} / R_1$  : vitesse relative

•  $\vec{V}_e(M, R_1/R) = \frac{d}{dt} (\vec{OO_1}) / R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$   
vitesse relative.

$\left[ \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M, R_1/R) \right]$  L.C.V

\* Loi de composition des accélérations:

•  $\vec{a}(M/R) = \vec{a}_a(M) = \frac{d}{dt} \vec{V}_a(M) / R = \frac{d^2}{dt^2} \vec{OM} / R$   
accélération absolue

•  $\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}_r(M) = \frac{d}{dt} \vec{V}_r(M) / R_1 = \frac{d^2}{dt^2} \vec{O_1M} / R_1$   
accélération relative

•  $\vec{a}_e(M, R_1/R) = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{OO_1}) / R + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$   
accélération d'entraînement

•  $\vec{a}_c(M, R_1/R) = 2 \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r(M/R_1)$

accélération de Coriolis  
 $\left[ \vec{a}_a(M/R) = \vec{a}_r(M/R_1) + \vec{a}_e + \vec{a}_c \right]$

## Exercice 1

- $\mathcal{R}_1(0, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_z)$  référentiel fixe (absolu).
- $\mathcal{R}_2(0, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_z)$  référentiel mobile (relatif)

ici  $O_1 \equiv O_2 \equiv O$  sont confondus

$$\vec{OM} = r_0 \sin \omega t \vec{e}_{x_2} \text{ et } r_0 = \text{cte.}$$

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta} \vec{e}_z = \omega \vec{e}_z \quad (\mathcal{R}_2 \text{ et en rotation } \omega / \mathcal{R}_1).$$

1=

- vitesse relatif.

$$\vec{V}_R(M/\mathcal{R}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{OM}) / \mathcal{R}_2 = \frac{d}{dt}(r_0 \sin \omega t \vec{e}_{x_2}) / \mathcal{R}_2$$

la base  $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_z)$  est fixe /  $\mathcal{R}_2$ .

$$\vec{V}_R(M/\mathcal{R}_2) = r_0 \omega \cos \omega t \vec{e}_{x_2} + r_0 \sin \omega t \frac{d}{dt} \vec{e}_{x_2} / \mathcal{R}_2$$

$$\text{donc } \left[ \vec{V}_R(M/\mathcal{R}_2) = r_0 \omega \cos \omega t \vec{e}_{x_2} \right]$$

- vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \frac{d}{dt}(\vec{OO}) / \mathcal{R}_1 + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge r_0 \sin \omega t \vec{e}_{x_2} = r_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_{y_2}$$

$$\left[ \vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = r_0 \omega \sin \omega t \vec{e}_{y_2} \right]$$

- vitesse absolue

$$\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1) = \vec{V}_R(M/\mathcal{R}_2) + \vec{V}_e(M, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$$

$$\left[ \vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1) = r_0 \omega (\cos \omega t \vec{e}_{x_2} + \sin \omega t \vec{e}_{y_2}) \right]$$

- module de  $\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1)$

$$\|\vec{V}_a(M/\mathcal{R}_1)\| = r_0 \omega.$$

A. Doye  
(2)



②-

• vitesse absolue par calcul direct.

$$\vec{V}_a(M/R_1) = \frac{d}{dt} \vec{OM} /_{R_1} = \frac{d}{dt} (\rho_0 \sin \omega t \vec{ex}_2) /_{R_1}$$

$$\vec{V}_a(M/R_1) = \frac{d}{dt} (\rho_0 \sin \omega t) \vec{ex}_2 + \rho_0 \sin \omega t \frac{d}{dt} \vec{ex}_2 /_{R_1}$$

$$\vec{V}_a(M/R_1) = \rho_0 \omega \cos \omega t \vec{ex}_2 + \rho_0 \sin \omega t \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{ex}_2$$

$$\vec{V}_a(M/R_1) = \rho_0 \omega \cos \omega t \vec{ex}_2 + \rho_0 \sin \omega t \cdot \omega \vec{ey} \wedge \vec{ex}_2$$

$$\left[ \vec{V}_a(M/R_1) = \rho_0 \omega (\cos \omega t \vec{ex}_2 + \sin \omega t \vec{ey}) \right]$$

③

• Accélération relative

$$\vec{a}_r(M/R_2) = \frac{d}{dt} \vec{V}_r(M/R_2) /_{R_2} = \frac{d}{dt} (\rho_0 \omega \cos \omega t \vec{ex}_2) /_{R_2}$$

$$\left[ \vec{a}_r(M/R_2) = -\rho_0 \omega^2 \sin \omega t \vec{ex}_2 \right]$$

• Accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e(M, R_2/R_1) = \vec{\Omega}(R_1/R_1) \wedge \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{OM} + \frac{d\vec{\Omega}(R_2/R_1)}{dt} \wedge \vec{OM}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{\Omega}(R_2/R_1)}{dt} /_{R_1} = \frac{d}{dt} (\omega \vec{ey}) /_{R_1} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_e(M, R_2/R_1) = \omega \vec{ey} \wedge [\omega \vec{ey} \wedge \rho_0 \sin \omega t \vec{ex}_2]$$

$$\vec{a}_e(M, R_2/R_1) = \omega \vec{ey} \wedge [\rho_0 \omega \sin \omega t \vec{ey} \wedge \vec{ex}_2]$$

$$\left[ \vec{a}_e(M, R_2/R_1) = -\rho_0 \omega^2 \sin \omega t \vec{ex}_2 \right]$$

• Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c(M, R_2/R_1) = 2 \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}_r(M/R_2)$$

$$\vec{a}_c(M, R_2/R_1) = 2 \omega \vec{ey} \wedge \rho_0 \omega \cos \omega t \vec{ex}_2$$

$$\left[ \vec{a}_c(M, R_2/R_1) = 2 \rho_0 \omega^2 \cos \omega t \vec{ey} \right]$$

A. Doya

③

• Accélération absolue

$$\vec{a}_a(m/R_1) = \vec{a}_R(m/R_2) + \vec{a}_e(m, R_2/R_1) + \vec{a}_c(m, R_2/R_1)$$

$$\vec{a}_a(m/R_1) = -\pi\omega^2 \sin\omega t \vec{e}_{x_2} - \pi\omega^2 \sin\omega t \vec{e}_{x_2} + 2\pi\omega^2 \cos\omega t \vec{e}_{y_2}$$

$$\left[ \vec{a}_a(m/R_1) = 2\pi\omega^2 (-\sin\omega t \vec{e}_{x_2} + \cos\omega t \vec{e}_{y_2}) \right]$$

• module de l'accélération absolue

$$\|\vec{a}_a(m/R_1)\| = 2\pi\omega^2$$

④ L'accélération absolue par calcul direct.

$$\vec{a}_a(m/R_1) = \frac{d}{dt} \vec{V}_a(m/R_1) / R_1$$

$$\vec{a}_a(m/R_1) = \frac{d}{dt} [\pi\omega (\cos\omega t \vec{e}_{x_2} + \sin\omega t \vec{e}_{y_2})] / R_1$$

car  $\vec{e}_{x_2}$  et  $\vec{e}_{y_2}$  sont mobiles /  $R_1$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_{x_2} / R_1 = \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{x_2} = \omega \vec{e}_{y_2}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{e}_{y_2} / R_1 = \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{y_2} = -\omega \vec{e}_{x_2}$$

$$\vec{a}_a(m/R_1) = \pi\omega \left[ \frac{d}{dt} (\cos\omega t) \vec{e}_{x_2} + \cos\omega t \frac{d}{dt} \vec{e}_{x_2} / R_1 + \frac{d}{dt} (\sin\omega t) \vec{e}_{y_2} + \sin\omega t \frac{d}{dt} \vec{e}_{y_2} / R_1 \right]$$

$$\vec{a}_a(m/R_1) = \pi\omega \left[ -\sin\omega t \vec{e}_{x_2} + \omega \cos\omega t \vec{e}_{y_2} + \omega \cos\omega t \vec{e}_{y_2} - \omega \sin\omega t \vec{e}_{x_2} \right]$$

d'où

$$\left[ \vec{a}_a(m/R_1) = 2\pi\omega (-\sin\omega t \vec{e}_{x_2} + \cos\omega t \vec{e}_{y_2}) \right]$$

A. Daye

④



## Exercice 2

$\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  repère d'observation  $\rightarrow$  référentiel fixe (absolu)  
 $\mathcal{R}'(O, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_z)$  repère lié à la hige  $\rightarrow$  référentiel mobile (relatif)

①  $\mathcal{R}'$  n'est pas en translation car le point  $O$  est fixe.

$$\vec{V}(O, \mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0} \Rightarrow \text{pas de translation.}$$

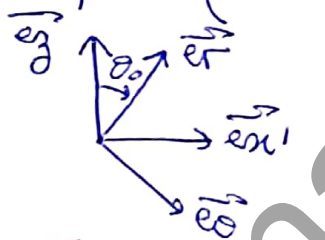
$\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  sur l'axe  $\vec{e}_z$

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \omega \vec{e}_z$$

$\mathcal{R}'$  n'est pas galiléen (mobile).

② Le vecteur position  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$

Dans le plan  $(Ox'z)$


$$\vec{e}_r = \sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{OM} = r(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z)}$$

③ •  $\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \vec{V}_r(M/\mathcal{R}') = \frac{d}{dt} \vec{OM} /_{\mathcal{R}'}$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \frac{d}{dt} \left[ r(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z) \right] /_{\mathcal{R}'}$$

( $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_z$ ) sont fixes /  $\mathcal{R}'$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}') = \dot{r}(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z)}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/\mathcal{R}') &= \frac{d}{dt} \vec{V}(M/\mathcal{R}') /_{\mathcal{R}'} = \frac{d}{dt} \left[ \dot{r}(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z) \right] /_{\mathcal{R}'} \\ &= \ddot{r}(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}') = \ddot{r}(\sin \theta_0 \vec{e}_{x'} + \cos \theta_0 \vec{e}_z)}$$

A. Douja



④

• Vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e(M, R'/R) = \frac{d}{dt} \left( \vec{OM} \right) / R + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{V}_e(M, R'/R) = \omega \vec{e}_3 \wedge r (\cos \theta_0 \vec{e}_3 + \sin \theta_0 \vec{e}_1)$$

$$\text{or } \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = \vec{0} \text{ et } \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

$$\boxed{\vec{V}_e(M, R'/R) = r \omega \sin \theta_0 \vec{e}_2}$$

• accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{OM}) / R + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM} + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \vec{OM}$$

$$\text{or } \frac{d^2}{dt^2} (\vec{OM}) / R = 0 \text{ et } \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \vec{OM} = 0$$

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \omega \vec{e}_3 \wedge (\omega \vec{e}_3 \wedge r (\cos \theta_0 \vec{e}_3 + \sin \theta_0 \vec{e}_1))$$

$$\boxed{\vec{a}_e(M, R'/R) = -r \omega^2 \sin \theta_0 \vec{e}_1}$$

• accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c(M, R'/R) = 2 \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V}_r(M/R')$$

$$\vec{a}_c(M, R'/R) = 2 \omega \vec{e}_3 \wedge r (\sin \theta_0 \vec{e}_1 + \cos \theta_0 \vec{e}_2)$$

$$\boxed{\vec{a}_c(M, R'/R) = 2 \dot{\omega} r \sin \theta_0 \vec{e}_2}$$

⑤

• Lois de composition des mouvements.

$$\vec{a}_a(M/R) = \vec{a}_r(M/R') + \vec{a}_e(M, R'/R) + \vec{a}_c(M, R'/R)$$

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_r(M/R') + \vec{V}_e(M, R'/R)$$

$$\begin{aligned}\vec{V}_a(m/R) &= \dot{r} \sin \theta_0 \vec{e}_x + r \dot{\omega} \sin \theta_0 \vec{e}_y + \dot{r} \omega \theta_0 \vec{e}_z \\ \vec{a}(m/R) &= (\ddot{r} - r \omega^2) \sin \theta_0 \vec{e}_x + 2 \dot{r} \dot{\omega} \sin \theta_0 \vec{e}_y + \ddot{r} \omega \theta_0 \vec{e}_z\end{aligned}$$

### Exercice 3

- $\mathcal{R}_1(O_1, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  référentiel galiléen (fixe, absolu).
- $\mathcal{R}_2(O_2, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  référentiel mobile (relatif).

①  $\mathcal{R}_2$  n'est pas en translation par rapport à  $\mathcal{R}_1$  car  $O_2$  est fixe dans  $\mathcal{R}_2$ .

$\mathcal{R}_2$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , son vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \omega \vec{e}_z$ .

Le référentiel  $\mathcal{R}_2$  n'est pas galiléen.

② • Vecteurs vitesse relative

$$\vec{V}_R(m/\mathcal{R}_2) = \frac{d}{dt}(\vec{O_2 m})_{/\mathcal{R}_2} = \frac{d}{dt}(R \vec{e}_r)_{/\mathcal{R}_2}$$

$$\boxed{\vec{V}_R(m/\mathcal{R}_2) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta}$$

• Vecteur vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e(m, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2})_{/\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{O_2 m}$$

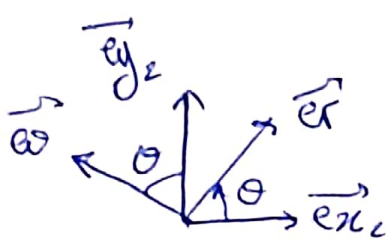
$$\text{or } \frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2})_{/\mathcal{R}_1} = \frac{d}{dt}(R \vec{e}_x)_{/\mathcal{R}_1} = R \frac{d}{dt} \vec{e}_x_{/\mathcal{R}_1}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2})_{/\mathcal{R}_1} = R \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \vec{e}_x = R \omega \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{O_1 O_2}) = R \omega \vec{e}_y$$

A. Daya  
⑦





$$\begin{aligned}\vec{e}_{\theta} &= \omega \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_{\theta} \\ \vec{e}_{\theta} &= \sin \theta \vec{e}_r + \omega \sin \theta \vec{e}_{\theta}\end{aligned}$$

d'où  $\frac{d}{dt} \vec{O_1 O_2} / R_1 = R \omega (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_{\theta})$

et  $\vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{O_2 M} = \omega \vec{e}_z \wedge R \vec{e}_r = R \omega \vec{e}_{\theta}$

d'où  $\left[ \vec{V}_e(M, R_2/R_1) = R \omega [\sin \theta \vec{e}_r + (1 + \cos \theta) \vec{e}_{\theta}] \right]$

• Vecteur Vitesse absolue.

$$\vec{V}_a(M/R_1) = \vec{V}_R(M/R_2) + \vec{V}_e(M, R_2/R_1)$$

$$\left[ \vec{V}_a(M/R_1) = R \omega \sin \theta \vec{e}_r + R [\dot{\theta} + \omega(1 + \cos \theta)] \vec{e}_{\theta} \right]$$

3-1

• Vecteur accélération relative

$$\vec{a}_R(M/R_2) = \frac{d}{dt} \vec{V}_R(M/R_2) / R_2 = \frac{d}{dt} (R \dot{\theta} \vec{e}_{\theta}) / R_2$$

$$\left[ \vec{a}_R(M/R_2) = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_{\theta} \right]$$

• Vecteur accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e(M, R_2/R_1) = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{O_1 O_2}) / R_1 + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{O_2 M} + \frac{d \vec{\Omega}(R_2/R_1) / R_1}{dt}$$

or  $\frac{d \vec{\Omega}(R_2/R_1)}{dt} / R_1 = \vec{0}$  car  $\vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega \vec{e}_z = \text{cte}$

et  $\frac{d^2}{dt^2} (\vec{O_1 O_2}) / R_1 = \frac{d}{dt} (R \omega \vec{e}_{\theta}) = -R \omega^2 \vec{e}_r$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{O_1 O_2}) / R_1 = -R \omega^2 (\omega \sin \theta \vec{e}_r - \cos \theta \vec{e}_{\theta})$$

A Day

8



$$R \vec{\Sigma}(R_2/R_1) \wedge \vec{\Sigma}(R_2/R_1) \wedge \vec{O}_2 \vec{M} = \omega \vec{e}_3 \wedge (\omega \vec{e}_3 \wedge R \vec{e}_r)$$

$$\vec{\Sigma}(R_2/R_1) \wedge \vec{\Sigma}(R_2/R_1) \wedge \vec{O}_2 \vec{M} = -R \omega^2 \vec{e}_r$$

d'où

$$\left[ \vec{a}_e(M, R_2/R_1) = R \omega^2 [-(1 + \cos \theta) \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] \right]$$

• Vecteur accélération de Coriolis.

$$\vec{a}_c(M, R_2/R_1) = 2 \vec{\Sigma}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}_2(M/R_2)$$

$$\vec{a}_c(M, R_2/R_1) = 2 \omega \vec{e}_3 \wedge R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\left[ \vec{a}_c(M, R_2/R_1) = -2 R \omega \dot{\theta} \vec{e}_r \right]$$

• Vecteur accélération absolue.

$$\vec{a}_a(M/R_1) = \vec{a}_r(M/R_2) + \vec{a}_e(M, R_2/R_1) + \vec{a}_c(M, R_2/R_1)$$

$$\left[ \vec{a}_a(M/R_1) = \left[ -R \ddot{\theta} - 2 R \dot{\theta} \omega - R \omega^2 (1 + \cos \theta) \right] \vec{e}_r + \left[ R \ddot{\theta} + R \omega^2 \sin \theta \right] \vec{e}_\theta \right]$$

### Exercice 4

•  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  référentiel galiléen (fixe-absolu)

•  $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_x', \vec{e}_y', \vec{e}_z')$  en translation rectiligne référentiel mobile ou relatif.

①  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne non uniforme

$$\vec{V}(O') = \frac{d}{dt}(\vec{OO'}) \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt}(a \sin \omega t) \vec{e}_y$$

$$\left[ \vec{V}(O') = a \omega \cos \omega t \vec{e}_y \right]$$

A. Daya  
⑤

2

• Vitesse relative

$$\vec{V}_R(M/R') = \frac{d}{dt}(\vec{O'M'})_{/R'} = \frac{d}{dt}(l \vec{e}_\varphi)_{/R'}$$

$$\boxed{\vec{V}_R(M/R') = l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi}$$

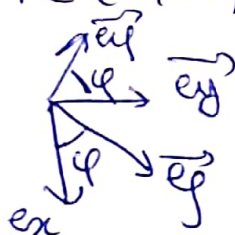
• Vitesse d'entraînement

$$\vec{V}_e(M, R'/R) = \frac{d}{dt}(\vec{OO'})_{/R} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M'}$$

ma  $\frac{d}{dt}(\vec{OO'})_{/R} = \vec{V}(O') = a\omega\cos\omega t \vec{e}_y$

$R'$  est en translation  $\rightarrow \vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0}$

Donc  $\vec{V}_e(M, R'/R) = a\omega\cos\omega t \vec{e}_y$



$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi &= \sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\psi &= \cos\varphi \vec{e}_x - \sin\varphi \vec{e}_y \end{aligned}$$

Donc  $\boxed{\vec{V}_e(M, R'/R) = a\omega\cos\omega t [\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y]}$

• Vitesse absolue

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_R(M/R') + \vec{V}_e(M, R'/R)$$

$$\boxed{\vec{V}_a(M/R) = (a\omega\cos\omega t \sin\varphi) \vec{e}_x + (l\dot{\varphi} + a\omega\cos\omega t \cos\varphi) \vec{e}_y}$$

3

• Accélération relative

$$\vec{a}_R(M/R') = \frac{d}{dt}(\vec{V}_R(M/R')) = \frac{d}{dt}(l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi)$$

$$\boxed{\vec{a}_R(M/R') = -l \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\varphi + l \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi}$$

A. Daya

10

- Accélération d'enlèvement

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \Big|_R + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M} + \frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt} \wedge \vec{O'M}$$

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = \frac{d}{dt} \vec{V(O')}_R = \frac{d}{dt} (a\omega \cos \omega t \vec{e}_y)$$

$$\vec{a}_e(M, R'/R) = -a\omega^2 \sin \omega t \vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{a}_e(M, R'/R) = -a\omega^2 \sin \omega t (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi)}$$

- Accélération de Coriolis.

$$\vec{a}_c(M, R'/R) = 2 \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{V}_R(M/R')$$

$$\boxed{\vec{a}_c(M, R'/R) = \vec{0}}$$

- Accélération absolue.

$$\vec{a}_a(M/R) = \vec{a}_R(M/R') + \vec{a}_e(M, R'/R) + \vec{a}_c(M, R'/R)$$

$$\vec{a}_a(M/R) = (-l\ddot{\varphi} - a\omega^2 \sin \omega t \sin \varphi) \vec{e}_r + (l\ddot{\varphi} - a\omega^2 \sin \omega t \cos \varphi) \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{a}_a(M/R) = \begin{pmatrix} -l\ddot{\varphi} - a\omega^2 \sin \omega t \sin \varphi \\ l\ddot{\varphi} - a\omega^2 \sin \omega t \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}$$

A. Daya

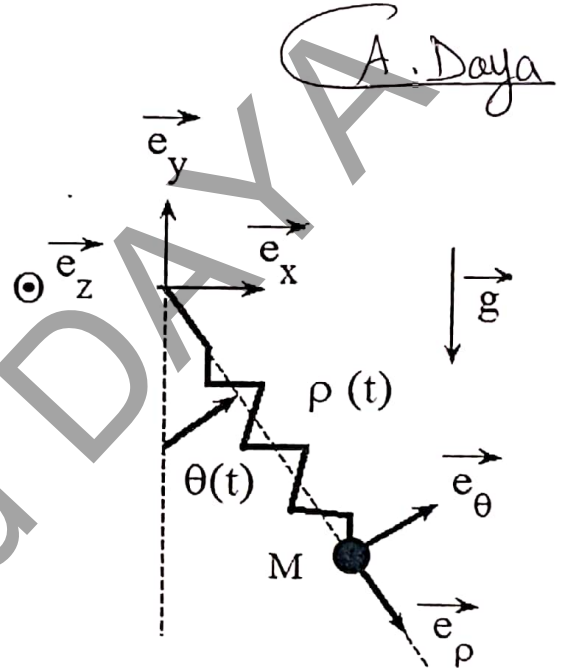


## MECANIQUE DU POINT MATERIEL

### Série N° 3 : Dynamique du point matériel & Théorèmes généraux

#### Exercice 1

On considère un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dans lequel évolue un système formé d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à l'une des extrémités d'un ressort de constante de raideur  $k$ . L'autre extrémité est accrochée à un point  $O$  fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}'$ , muni du repère  $(O; (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z))$ . Le ressort peut s'allonger ou rétrécir, mais ne peut pas être tordu. L'angle orienté formé entre le ressort et la verticale est repéré par la variable  $\theta(t)$ . A l'équilibre, c'est à dire lorsqu'aucune masse n'est accrochée au ressort, la longueur de ce dernier vaut  $\rho_0$ . La distance  $OM$  est repérée par la variable  $\rho(t)$  (voir schéma).



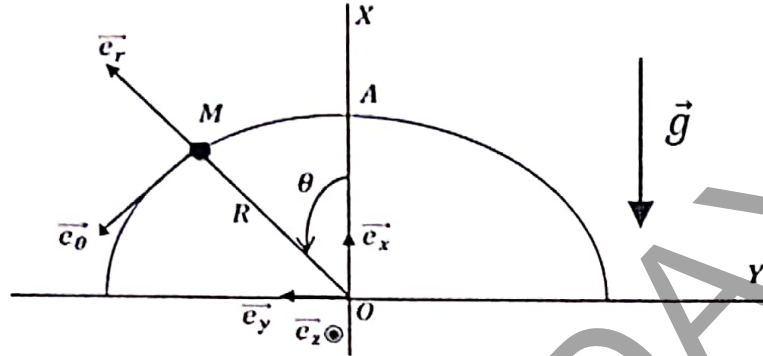
Dans ce problème, nous négligeons les forces de frottement et le ressort est supposé sans masse (négligeable). Nous souhaitons étudier le mouvement du point  $M$  dans le plan  $(XOY)$ .

*Tous les vecteurs seront exprimés dans la base du repère cylindrique  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$*

1. Déterminer les expressions du vecteur position  $\vec{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  du point  $M$ .
2. Réaliser le **bilan des forces** s'exerçant sur le point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
3. Ecrire la **relation fondamentale de la dynamique** dans  $\mathcal{R}$  (RFD). En projetant cette relation suivant  $\vec{e}_\rho$  et suivant  $\vec{e}_\theta$ , montrer que le mouvement du point  $M$  est déterminé par un système d'équation différentielle (Ne pas résoudre ce système).
4. Retrouver l'une de ces équations en utilisant le **théorème du moment cinétique**.
5. Donner l'expression des **travaux élémentaires** des forces agissant sur le point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
6. En déduire l'**énergie potentielle** totale du système  $E_p(\rho, \theta)$ .

## Exercice 2

On considère un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  rapporté à un repère cartésien  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  dans lequel une bille  $M$  de masse  $m$  est lâchée avec une vitesse initiale  $V_0$  du sommet  $A$  d'une demi-sphère métallique de rayon  $R$ . Le mouvement de  $M$  s'effectue, sans frottement dans un plan verticale contenant le point  $A$ . On repère la position de  $M$  par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ .

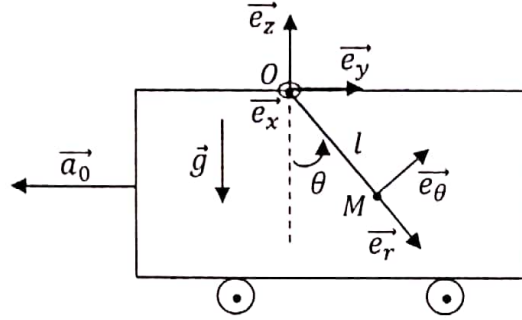


Tous les vecteurs seront exprimés dans la base du repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

1. Déterminer les expressions du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/\mathcal{R})$  et du vecteur accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  du point  $M$ .
2. Réaliser le **bilan des forces** s'exerçant sur le point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
3. Ecrire la **relation fondamentale de la dynamique** dans  $\mathcal{R}$  (RFD). En projetant cette relation suivant  $\vec{e}_r$  et suivant  $\vec{e}_\theta$ , montrer que le mouvement du point  $M$  est déterminé par un système d'équation différentielle en  $\theta$ .
4. Retrouver l'une de ces équations en utilisant le **théorème du moment cinétique**.
5. Trouver une **intégrale première** du mouvement du point  $M$ .
6. Déterminer la **réaction** du demi-sphère métallique sur la bille  $M$  en fonction de  $m, R, g, V_0$  et  $\theta$ .
7. Pour  $V_0 = 0$ , calculer l'angle limite  $\theta_l$  pour laquelle la **réaction est nulle**.
8. Pour  $\theta_l = 0$ , calculer la vitesse initiale  $V_0$  pour laquelle la bille  $M$  quitte la demi-sphère métallique.
9. A partir de l'équation différentielle en  $\theta$ , en déduire les **positions  $\theta_e$  d'équilibre** possibles. **Etudier la stabilité de ces équilibres** et donner les expressions des **périodes des oscillations** autour des positions stables (on posera  $\theta = \theta_e + \varepsilon$  et on étudiera les équations différentielles en  $\varepsilon$ ).
10. Donner l'**expression des travaux élémentaires** des forces agissants sur le point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
11. En déduire l'**énergie potentielle totale** du système  $E_p(\theta)$ .
12. Retrouver les **positions d'équilibre  $\theta_e$**  et **discuter de sa stabilité** en donnant les expressions des **périodes des oscillations** autour des **positions d'équilibre stables**.

### Exercice 3

Soit un référentiel  $\mathcal{R}(\mathbf{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié à un véhicule en translation horizontale d'accélération  $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_y$  ( $a_0$  est une constante positive) par rapport au **référentiel terrestre**  $\mathcal{R}_T$  **supposé galiléen**. On étudie dans  $\mathcal{R}$ , les petites oscillations planes d'un pendule simple formé par une boule en acier  $M$  de masse  $m$  et un fil de longueur  $l$  accroché au plafond du véhicule au point  $O$ .

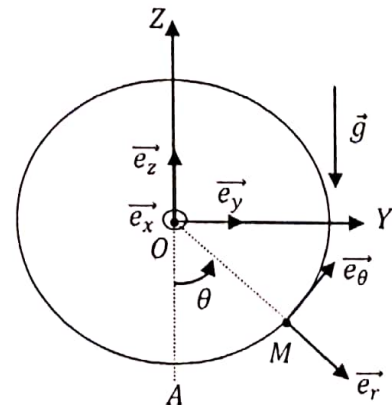


On prendra comme paramètre variable du mouvement l'angle  $\theta$  que fait le pendule simple avec l'axe vertical  $(\mathbf{O}, \vec{e}_z)$ .

1. Le référentiel  $\mathcal{R}(\mathbf{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est-il galiléen ? justifiez votre réponse.
2. Exprimer dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , les vecteurs suivants: la vitesse relative  $\vec{V}_r = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ , l'accélération relative  $\vec{a}_r = \vec{a}(M/\mathcal{R})$ , l'accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_T)$  et l'accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}/\mathcal{R}_T)$ .
3. Exprimer dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , les forces qui s'exercent sur la boule  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
4. Donner l'équation différentielle en  $\theta$ , en utilisant la **relation fondamentale de la dynamique** (RFD) dans  $\mathcal{R}$ .
5. En déduire la **position d'équilibre**  $\theta_e$ . (On donnera  $\tan \theta_e$ )
6. Donner l'expression des **travaux élémentaires** des forces agissant sur la boule  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
7. Montrer que le **système est conservatif** dans  $\mathcal{R}$  et donner son énergie potentielle totale  $E_p(\theta)$ . On prendra l'origine des énergies potentielles en  $\theta = 0$  ( $E_p(0) = 0$ ).
8. La **position d'équilibre**  $\theta_e$  est-il stable ? si oui donner la **période**  $T$  des petites oscillations au voisinage de cette position d'équilibre.

### Exercice 4

Un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , se déplace sans frottement sur le côté intérieur d'un cerceau de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Le cerceau est fixe dans le plan  $(YOZ)$  d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}(\mathbf{O}; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , dans lequel  $OZ$  représente la verticale ascendante. On note  $g$  le module constant du champ de pesanteur terrestre. Soit  $A$  le point le plus bas situé à  $(\theta_A = 0)$ . On introduit la base polaire  $\mathcal{R}'(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$  liée à  $M$  dans le plan  $(YOZ)$ , et définie par les vecteurs unitaires  $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{R}$  et  $\vec{e}_\theta$  avec  $\theta = (-\vec{e}_z, \vec{OM})$ .

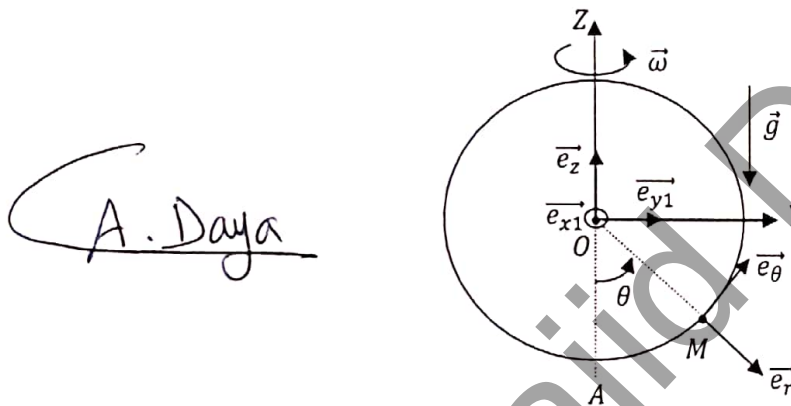




1. Exprimer, les vecteurs vitesse  $\vec{V}(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R})$  et accélération  $\vec{a}(M) = \vec{a}(M/\mathcal{R})$  du point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{R}'$ .
2. Réaliser le **bilan des forces** s'exerçant sur  $M$  dans  $\mathcal{R}$  et les exprimer dans  $\mathcal{R}'$ .
3. Trouver l'équation du mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  vérifiée par  $\theta(t)$ .
  - 3.1. En appliquant la **relation fondamentale de la dynamique (RFD)** dans  $\mathcal{R}$ .
  - 3.2. En appliquant le **théorème du moment cinétique** par rapport à  $OX$ .
  - 3.3. En appliquant le **théorème l'énergie mécanique**.

### B - Cerceau est en mouvement

Le cerceau tourne autour de son diamètre verticale  $OZ$  à la vitesse angulaire  $\omega$  constante. On note  $\mathcal{R}_1(O; \vec{e}_{x1}, \vec{e}_{y1}, \vec{e}_z)$  le référentiel lié au cerceau, et **confondu** avec  $\mathcal{R}$  à l'instant initial. La base polaire  $\mathcal{R}'(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$  est toujours liée à  $M$  dans le plan  $(YOZ)$ .



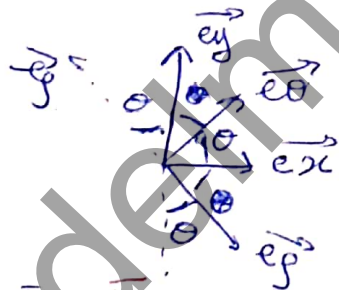
1. Donner l'expression du vecteur rotation  $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R})$  de  $\mathcal{R}_1$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .
2. Exprimer les vecteurs vitesses du point  $M$  : vitesse relative  $\vec{V}_r(M/\mathcal{R}_1)$ , vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ .
3. Exprimer les vecteurs accélérations du point  $M$  : accélération relative  $\vec{a}_r(M/\mathcal{R}_1)$ , accélération d'entraînement  $\vec{a}_e(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ , accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ .
4. Réaliser le **bilan des forces** s'exerçant sur  $M$  dans  $\mathcal{R}_1$  et les exprimer dans  $\mathcal{R}'$ .
5. En appliquant la **relation fondamentale de la dynamique (RFD)** dans  $\mathcal{R}_1$ , trouver l'équation différentielle en  $\theta$ , qui régie le mouvement du point matériel  $M$  sur le cerceau. En déduire les **positions  $\theta_e$  d'équilibre possibles**
6. Etudier la **stabilité de ces équilibres** et donner les expressions des **périodes des oscillations** autour des positions stables (on posera  $\theta = \theta_e + \varepsilon$ ).
7. Donner l'expression des **travaux élémentaires** des forces agissant sur le point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .
8. En déduire l'énergie potentielle totale du système  $E_p(\theta)$ . On prendra l'origine des énergies potentielles en  $\theta = 0$  ( $E_p(0) = 0$ ).
9. Retrouver les **positions d'équilibre  $\theta_e$**
10. **Discuter sa stabilité** en donnant les expressions des **périodes des oscillations** autour des **positions d'équilibre stables** dans le cas où  $\omega^2 < \frac{g}{R}$  et dans le cas où  $\omega^2 > \frac{g}{R}$ .

DYNAMIQUE ET THEOREMES GENERAUXExercice 1

- ① • Vecteur position  $[\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho]$   
 • Vecteur vitesse  $\vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{OM} /_R = \frac{d}{dt} (\rho \vec{e}_\rho) /_R$   
 $[\vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta]$   
 • Vecteur accélération  
 $\vec{a}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{V}(M/R) /_R = \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta) /_R$   
 $[\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta]$

- ② Bilan des forces s'exerçant sur M

- Poids de M  $\rightarrow \vec{P} = -mg \vec{e}_y$



$$\vec{e}_y = -\cos \theta \vec{e}_\rho + \sin \theta \vec{e}_\theta$$

d'où

$$[\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta)]$$

- Force élastique du ressort sur M.

$$[\vec{F}_{el} = -K(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho]$$

- ③ Relation fondamentale de la dynamique (RFD) dans R

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \vec{a}(M/R)$$

$$\vec{P} + \vec{F}_{el} = m \vec{a}(M/R)$$

$$mg(\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_\theta) - K(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho = m[(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta]$$

• Projection de la RFD

$$\frac{1}{2} \vec{e}_r \rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - k(r - r_0)$$

$$\frac{1}{2} \vec{e}_\theta \rightarrow m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -g \sin \theta$$

d'où

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \vec{e}_r \rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g \cos \theta - \frac{k}{m}(r - r_0) \\ \frac{1}{2} \vec{e}_\theta \rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g \sin \theta \end{array} \right]$$

(4) Théorème du moment cinétique  $\frac{d}{dt} L_0(m) = \sum \mathcal{M}_0(\vec{F}_i)$   
avec  $L_0(m) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(M/R)$

$$\mathcal{M}_0(\vec{F}_i) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_i$$

$$\bullet L_0(m) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(M/R) = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta)$$

$$L_0(m) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\left[ \frac{d}{dt} L_0(m) = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_z \right]$$

$$\bullet \mathcal{M}_0(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = r \vec{e}_r \wedge mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\left[ \mathcal{M}_0(\vec{P}) = -mg r \sin \theta \vec{e}_z \right]$$

$$\bullet \mathcal{M}_0(\vec{F}_\ell) = \vec{OM} \wedge \vec{F}_\ell = r \vec{e}_r \wedge -k(r - r_0) \vec{e}_r$$

$$\left[ \mathcal{M}_0(\vec{F}_\ell) = \vec{0} \right]$$

$$\bullet \text{TMC} \rightarrow \frac{d}{dt} L_0(m) = \mathcal{M}_0(\vec{P}) + \mathcal{M}_0(\vec{F}_\ell)$$

$$\rightarrow m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -mg r \sin \theta$$

$$\left[ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g \sin \theta \right]$$

A. Doye



⑤ le travail élémentaire est donné par  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

$$d\vec{OM} = dg \vec{e}_\rho + g d\theta \vec{e}_\theta$$

- $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = mg(\cos\theta \vec{e}_\rho - \sin\theta \vec{e}_\theta)(dg \vec{e}_\rho + g d\theta \vec{e}_\theta)$

$$\delta W(\vec{P}) = mg \cos\theta dg - mg g \sin\theta d\theta$$

$$\left[ \delta W(\vec{P}) = d(mg g \cos\theta + cte_1) \right]$$

- $\delta W(\vec{F}_{el}) = \vec{F}_{el} \cdot d\vec{OM} = -K(\rho - \rho_0) \vec{e}_\rho \cdot (dg \vec{e}_\rho + g d\theta \vec{e}_\theta)$

$$\delta W(\vec{F}_{el}) = -K(\rho - \rho_0) dg$$

$$\left[ \delta W(\vec{F}_{el}) = d\left(-\frac{K}{2}(\rho - \rho_0)^2 + cte_2\right) \right]$$

⑥ l'énergie potentielle est donnée par :  $\delta W = -dE_p$

$$-dE_p(\rho, \theta) = \delta W(\vec{P}) + \delta W(\vec{F}_{el})$$

$$-dE_p(\rho, \theta) = d\left[mg g \cos\theta - \frac{K}{2}(\rho - \rho_0)^2 + cte\right]$$

avec  $cte = cte_1 + cte_2 = cte \text{ pure}$ .

donc

$$\left[ E_p(\rho, \theta) = -mg g \cos\theta + \frac{K}{2}(\rho - \rho_0)^2 + cte \right]$$

## Exercice 2

A. Daya.

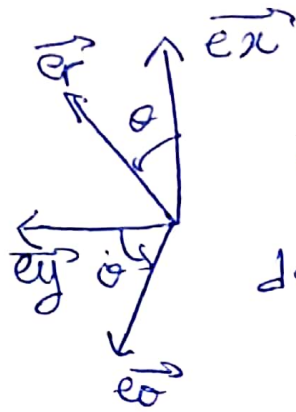
①

- Vecteur position :  $\vec{OM} = R \vec{e}_r$
- Vecteur vitesse :  $\vec{V}(M/R) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- Vecteur accélération :  $\vec{a}(M/R) = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

② Bilan des forces s'exerçant sur M.

- Poids du M  $\rightarrow \vec{P} = -mg \vec{e}_x$
- Reaction du  $\frac{1}{2}$  sphere métallique sur M :  $\vec{R} = R_R \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$

③



$$\vec{e}_x = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{donc } \left[ \vec{P} = -mg \cos\theta \vec{e}_r + mg \sin\theta \vec{e}_\theta \right]$$

le M<sup>vt</sup> du M est sans frottement  $\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow R_\theta = 0$   
donc la réaction

$$\left[ \vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_z \vec{e}_z \right]$$

③ Relation fondamentale de la dynamique sur m  
 $m \vec{a}(m/R) = \sum \vec{F}_{ex} = \vec{P} + \vec{R}$

$$m(-R\ddot{\theta} \vec{e}_r + R\dot{\theta}^2 \vec{e}_\theta) = -mg \cos\theta \vec{e}_r + mg \sin\theta \vec{e}_\theta + R_r \vec{e}_r + R_z \vec{e}_z$$

$$\% \vec{e}_r \rightarrow -mR\ddot{\theta} = -mg \cos\theta + R_r$$

$$\% \vec{e}_\theta \rightarrow mR\dot{\theta} = mg \sin\theta$$

$$\% \vec{e}_z \rightarrow 0 = R_z$$

Donc

$$\% \vec{e}_r \rightarrow -mR\ddot{\theta} = -mg \cos\theta + R_r$$

$$\% \vec{e}_\theta \rightarrow \left\{ \ddot{\theta} = g/R \sin\theta \right\}$$

équation différentielle en  $\theta$

④ TMC  $\rightarrow \frac{d}{dt} L_0(m) = \mathcal{M}_0(\vec{F}_{ext})$

$$L_0(m) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(m/R) = R \vec{e}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$L_0(m) = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\left[ \frac{d}{dt} L_0(m) = m R^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z \right]$$

A. Day a

$$\cdot \mathcal{U}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_r \wedge (-mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\left[ \mathcal{U}_O(\vec{P}) = mgR \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\cdot \mathcal{U}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = R \vec{e}_r \wedge (R_2 \vec{e}_r + R_3 \vec{e}_3)$$

$$\left[ \mathcal{U}_O(\vec{R}) = \vec{0} \right]$$

$$\cdot TMC \rightarrow MR^2 \ddot{\theta} = mgR \sin \theta$$

$$\left[ \ddot{\theta} = g/R \sin \theta \right] \text{ equation différentielle en } \theta$$

⑤ Intégrale première et une fonction  $\dot{X}^2 = f(X)$  en générale.

$$\text{on a: } \ddot{\theta} = g/R \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} \cdot \dot{\theta} = g/R \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( -g/R \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -g/R \cos \theta + \text{cte}$$

$$\text{à } t=0, \theta_0 = 0 \text{ et } \dot{\theta}_0 = V_0/R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R^2} = -g/R + \text{cte}$$

$$\Rightarrow \text{cte} = \frac{V_0^2}{2R^2} + g/R$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -g/R \cos \theta + g/R + \frac{V_0^2}{2R^2}$$

$$\left[ \dot{\theta}^2 = \left( \frac{V_0}{R} \right)^2 + \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta) \right] \text{ intégrale première}$$

A. Daya

⑤



6-

La projection sur  $\vec{e}_r$  nous donne  $\vec{R} = R_r \vec{e}_r$  ( $R_z = 0$ )

$$R_r = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

$$R_r = -mR\left(\frac{V_0^2}{R^2} + \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)\right) + mg\cos\theta$$

$$R_r = -\frac{m}{R}V_0^2 + 2mg(\cos\theta - 1) + mg\cos\theta$$

d'où

$$R_r = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{m}{R}V_0^2$$

7-

Pour  $V_0 = 0 \rightarrow R_r = 0$

$$\Rightarrow mg(3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = 48^\circ 21'$$

8-

Pour  $\theta = 0$ , la bille touche la  $\frac{1}{2}$  sphère métallique  
càd  $R_r = 0$

$$0 = mg(3\cos 0 - 2) - \frac{m}{R}V_0^2$$

$$0 = mg - mV_0^2/R$$

donc

$$V_0 = \sqrt{gR}$$

9-

à l'équilibre  $\ddot{\theta} = 0$

L'équation différentielle  $\ddot{\theta} = g/R \sin\theta = 0$

$$\rightarrow \sin\theta_{eq} = 0 \rightarrow \left[ \theta_{eq} = 0 \text{ ou } \theta_{eq} = \pi \right]$$

2 positions d'équilibre

A. Daya

62

•  $\theta_{eq} = 0$

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} = g/R \sin \varepsilon \rightarrow \left[ \ddot{\varepsilon} - g/R \sin \varepsilon = 0 \right]$$

$\ddot{\varepsilon} - g/R \varepsilon = 0$

$\theta_{eq} = 0$ , position instable.  $\rightarrow$  pas de période.

•  $\theta_{eq} = \pi$

$$\theta = \pi + \varepsilon \rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} = g/R \sin(\pi + \varepsilon) = -g/R \sin \varepsilon$$

$$\left[ \ddot{\varepsilon} + g/R \sin \varepsilon = 0 \right] \rightarrow \begin{cases} \ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0 \\ \omega^2 = g/R \end{cases}$$

$\theta_{eq} = \pi$  est une position stable.

La période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,  $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$

Donc

$$\left[ \begin{array}{l} \theta_{eq} = 0 \rightarrow \ddot{\varepsilon} - g/R \varepsilon = 0 \text{ instable} \\ \theta_{eq} = \pi \rightarrow \ddot{\varepsilon} + g/R \varepsilon = 0 \text{ stable et} \\ T = 2\pi \sqrt{R/g}. \end{array} \right]$$

10-

Le travail élémentaire est donné par  $\delta W(F) = \vec{F} \cdot d\vec{om}$

•  $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{om} = (-mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta) R d\theta \vec{e}_\theta$

$$\delta W(\vec{P}) = mgR \sin \theta d\theta$$

$$\left[ \delta W(\vec{P}) = d(-mgR \cos \theta + \text{cte}_1) \right]$$

•  $\delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{om} = (R \vec{e}_r) \cdot R d\theta \vec{e}_\theta = 0$

$$\left[ \delta W(\vec{R}) = 0 \right]$$

(7)

A. Daya

(11) l'énergie potentielle totale est:  $-dE_p(\theta) = \delta w(\vec{r})$   
 $-dE_p(\theta) = \delta w(\vec{r}) + \delta w(\vec{R})$   
 $-dE_p(\theta) = d(-mgR \cos \theta + cte)$   
 $E_p(\theta) = mgR \cos \theta + cte$

(12) Pour déterminer les positions d'équilibre  
 $\frac{d}{d\theta} E_p(\theta) = 0$

Pour la stabilité, il faut étudier  $\frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) /_{\theta_{ep}}$

•  $\frac{d}{d\theta} E_p(\theta) = -mgR \sin \theta = 0$

$\rightarrow [\theta_{ep} = 0 \text{ ou } \theta_{ep} = \pi]$

•  $\frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) = -mgR \cos \theta$

$\rightarrow$  Pour  $\theta_{ep} = 0 \rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) /_{\theta_{ep}=0} = -mgR < 0$

donc  $[\theta_{ep} = 0 \text{ est instable}]$

$\rightarrow$  Pour  $\theta_{ep} = \pi \rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) = mgR > 0$

donc  $[\theta_{ep} = \pi \text{ est stable}]$

Pour chercher la période des oscillations autour de la position stable c.à.d  $\theta_{ep} = \pi$ , il faut calculer l'énergie mécanique  $E_m$

A. Doya



$$\Omega \quad E_m = E_c + E_p = \text{cte} \quad , \quad E_c = \frac{1}{2} m V^2 (R) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

un développement limite sera effectué sur  $E_p(\theta)$

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_{eq}) + (\theta - \theta_{eq}) \cdot \left. \frac{dE_p(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta_{eq}} + \frac{(\theta - \theta_{eq})^2}{2} \cdot \left. \frac{d^2 E_p(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}}$$

•  $\theta_{eq} = \pi \rightarrow$  position stable

$$E_p(\pi) = mgR + \text{cte} = \text{cte}$$

$$\left. \frac{dE_p(\theta)}{d\theta} \right|_{\pi} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2 E_p(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\pi} = mgR$$

$$E_p(\theta) = E_p(\pi) + mgR \cdot \frac{(\theta - \pi)^2}{2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{donc} \quad E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + E_p(\pi) + \frac{mgR}{2} (\theta - \pi)^2 = \text{cte}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} m R^2 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{mgR}{2} 2 \dot{\theta} (\theta - \pi) = 0$$

$$\Rightarrow R \ddot{\theta} + g(\theta - \pi) = 0$$

$$\text{Posons} \quad \theta = \pi + \varepsilon \rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\text{donc} \quad \left[ \ddot{\varepsilon} + g/R \varepsilon = 0 \right]$$

$$\left[ T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \right]$$

A. Daya

### Exercice 3

$R_T$ : référentiel terrestre  $\rightarrow$  fixe.

$R$ : référentiel en translation /  $R_T$

$$\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_y$$

(1)  $R$  est en translation horizontale  
donc  $R$  n'est pas galiléen

- (2)
- Vecteur position  $\vec{OM} = l \vec{e}_r$
  - Vecteur vitesse  $\vec{V}_R(M/R) = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
  - Vecteur accélération  $\vec{a}_R(M/R) = -l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$
  - Vecteur accélération d'entraînement

$$\vec{a}_e(M, R/R_T) = -a_0 \vec{e}_y$$

- Vecteur accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(M, R/R_T) = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_R$   
 $\vec{a}_c(M, R/R_T) = \vec{0}$

(3) RFD  $\rightarrow m \vec{a}_R(M/R) = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

- Tension du fil:  $\vec{T} = -T \vec{e}_r$

- Poids du  $m$ :  $\vec{P} = -mg \vec{e}_y = mg(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$

- Force d'inertie de Coriolis.

$$\vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

- Force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_e(M, R/R_T) = m a_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_{ie} = m a_0 (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)$$

Donc

$$m(-l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + l \ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = -T \vec{e}_r + mg(\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) + m a_0 (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)$$

A. Jolya.

(10)

$$\frac{1}{2} \ddot{\theta} \rightarrow m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta + m a_0 \cos \theta.$$

$$\rightarrow \left[ \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \frac{a_0}{l} \cos \theta \right]$$

5. à l'équilibre  $\rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\rightarrow -g \sin \theta_e + a_0 \cos \theta_e = 0$$

$$\rightarrow \left[ \lg \theta_e = \frac{a_0}{g} \right]$$

6.  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{om}$

$$\rightarrow \delta W(\vec{T}) = T \cdot d\vec{om} = -T \vec{e}_r \cdot l d\theta \vec{e}_\theta = 0$$

$$\left[ \delta W(\vec{T}) = 0 \right]$$

$$\rightarrow \delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{om} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta) l d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\delta W(\vec{P}) = -mgl \sin \theta d\theta$$

$$\left[ \delta W(\vec{P}) = d(mgl \cos \theta + cte_1) \right]$$

\* Force de ne travaille pas.

$$\rightarrow \delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{om} = m a_0 (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) l d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\delta W(\vec{F}_{ie}) = m a_0 l \cos \theta d\theta$$

$$\left[ \delta W(\vec{F}_{ie}) = d(m a_0 l \sin \theta + cte_2) \right]$$

7.  $-dE_p(\theta) = \delta W(\vec{T}) + \delta W(\vec{P}) + \delta W(\vec{F}_{ie}) + \delta W(\vec{F}_{ic})$

$$-dE_p(\theta) = d(mgl \cos \theta + cte_1 + m a_0 l \sin \theta + cte_2)$$

$$\left[ E_p(\theta) = -m l (g \cos \theta + a_0 \sin \theta + cte) \right]$$



$$\ddot{\theta} = 0 \rightarrow E_p(0) = 0 \Rightarrow g + cte = 0 \\ \Rightarrow cte = -g$$

d'où 
$$E_p(\theta) = -m l (g(1 + \cos \theta) + a_0 \sin \theta)$$

8-

$$\bullet \frac{d}{d\theta} E_p(\theta) = -m l (-g \sin \theta + a_0 \cos \theta) = 0$$

$$\rightarrow \left[ \lg \theta_e = \frac{a_0}{g} \right]$$

$$\bullet \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) = m l (g \cos \theta + a_0 \sin \theta)$$

$$\text{on } \cos \theta_{eq} = \frac{1}{(1 + \lg^2 \theta_e)^{1/2}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

$$\sin \theta_{eq} = \frac{\lg \theta_e}{\sqrt{1 + \lg^2 \theta_e}} = \frac{a_0}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

d'où 
$$\frac{d^2 E_p(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta_{eq}} = m l \left[ \frac{g^2}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} + \frac{a_0^2}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \right]$$

$$\frac{d^2 E_p(\theta)}{d\theta^2} \Big|_{\theta_{eq}} = m l \sqrt{g^2 + a_0^2} > 0$$

Donc  $\lg \theta_e = \frac{a_0}{g}$  est une position stable

$$\bullet E_m = E_c + E_p(\theta)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m V^2 + E_p(\theta_{eq}) + (\theta - \theta_e) \frac{dE_p(\theta)}{d\theta} + \frac{(\theta - \theta_e)^2}{2} \frac{d^2 E_p(\theta)}{d\theta^2}$$

$$E_p(\theta_e) = cte = cte, \quad \frac{dE_p}{d\theta} \Big|_{\theta_e} = 0$$

$$d^2 E_p / d\theta^2 = m l \sqrt{g^2 + a_0^2}$$

(12)

A. Doya

don  $E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + cte + \frac{(\theta - \theta_e)^2}{2} m l \sqrt{g^2 + a^2} = cte$   
 $\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} m l^2 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \frac{(\theta - \theta_e)}{2} m l \sqrt{g^2 + a^2} = 0$

$\rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} (\theta - \theta_e) = 0$

Posons  $\theta = \theta_e + \varepsilon \rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$

don  $\left[ \ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \varepsilon = 0 \right]$

$\omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}$

$\left[ T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} \right]$

A. Doya

## Exercice 4

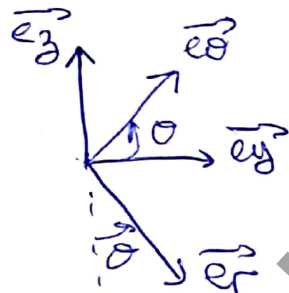
### A - Cercle est immobile

①

$$\left[ \begin{aligned} \bullet \vec{OM} &= R \vec{e}_r \\ \bullet \vec{V}(M) &= \vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{OM} /_R = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \bullet \vec{a}(M) &= \vec{a}(M/R) = \frac{d}{dt} \vec{V}(M) /_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta \end{aligned} \right]$$

② Bilan des forces s'exerçant sur M

•  $\vec{P}$  : Poids de M  $\rightarrow \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$



$$\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_z = -\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta$$

donc  $\left[ \vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$

•  $\vec{R}$  : réaction du cercle sur M.

$$\vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta + R_x \vec{e}_x$$

M<sup>vt</sup> sans frottement  $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow [R_\theta = 0]$

M<sup>vt</sup> dans le plan (OYZ) c-à-d dans le plan  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ .

$$\Rightarrow [R_x = 0]$$

donc  $\left[ \vec{R} = R_r \vec{e}_r \right]$  avec  $R_r < 0$   
dirigée de M vers O

③ 3.1 - RFD  $\rightarrow m \vec{a}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$

$$m(-R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = R_r \vec{e}_r + mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$$

A. Doya



$$\% \vec{e}_\theta \rightarrow m R \ddot{\theta} = -mg \sin \theta$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -g/R \sin \theta$$

$$\rightarrow \left[ \ddot{\theta} + g/R \sin \theta = 0 \right]$$

$$\underline{\underline{3.2}} - TMC \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_O(m) = \sum \vec{\mathcal{L}}_O(F_{ext})$$

$$\bullet \vec{L}_O(m) = \vec{OM} \wedge m \vec{V}(m) = R \vec{e}_r \wedge m R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O(m) = m R^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O(m) = m R^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\% \text{OX} \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L}_O(m) \cdot \vec{e}_z = m R^2 \ddot{\theta}$$

$$\rightarrow \left[ \vec{L}_O(m) /_{\text{OX}} = m R^2 \ddot{\theta} \right]$$

$$\bullet \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{\mathcal{L}}_O(\vec{P}) = -mgR \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\text{donc} \left[ \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{P}) /_{\text{OX}} = \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -mgR \sin \theta \right]$$

$$\bullet \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{R}) = \vec{OM} \wedge \vec{R} = R \vec{e}_r \wedge R \vec{e}_r = \vec{0}$$

$$\text{donc} \left[ \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{R}) /_{\text{OX}} = 0 \right]$$

$$\text{Donc} \quad \vec{L}_O(m) /_{\text{OX}} = \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{P}) /_{\text{OX}} + \vec{\mathcal{L}}_O(\vec{R}) /_{\text{OX}}$$

$$m R^2 \ddot{\theta} = -mgR \sin \theta$$

A. Doya

donc  $\left[ \ddot{\theta} + g/R \sin \theta = 0 \right]$

3.3 - TEM  $\rightarrow E_m = E_c + E_p$ .

•  $E_c = \frac{1}{2} m V^2(m) = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2$ .

•  $-dE_p = \delta W(\vec{F})$ .

$\rightarrow \delta W(\vec{F}) = \vec{P} \cdot d\vec{om} = (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) R d\vec{\theta}$   
 $\delta W(\vec{F}) = -mg \sin \theta R d\theta = d(mgR \cos \theta + cte_1)$   
 $= -dE_{P_{\vec{P}}}(\theta)$ .

$\rightarrow \left[ E_{P_{\vec{P}}}(\theta) = -mgR \cos \theta + cte_1 \right]$

$\rightarrow \delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{om} = R \vec{e}_r \cdot R d\vec{\theta} = 0$   
 $= -dE_{P_{\vec{R}}}(\theta) = d(cte_2)$ .

$\left[ E_{P_{\vec{R}}}(\theta) = cte_{P_{\vec{R}}} \right]$

Donc  $E_p(\theta) = E_{P_{\vec{P}}}(\theta) + E_{P_{\vec{R}}}(\theta) = -mgR \cos \theta + cte$

$E_p(\theta) = -mgR \cos \theta + cte$

à  $\theta = 0 \rightarrow E_p(\theta) = 0 \Rightarrow cte = mgR$

donc  $\left[ E_p(\theta) = mgR(1 - \cos \theta) \right]$

finalemment  $\left[ E_m = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = cte \right]$

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{m}{2} R^2 \cdot 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin \theta = 0$

$\left[ \ddot{\theta} + g/R \sin \theta = 0 \right]$

A Doye  
(16)

## B - Cerceau en mouvement

①  $\left[ \vec{\Omega}(R_1/R) = \omega \vec{e}_3 \right]$

② • Vecteur position :  $\vec{OM} = R \vec{e}_r$   
 • Vitesse relative :  $\vec{V}_R(M/R_1) = \frac{d(\vec{OM})}{dt} / R_1$

$\left[ \vec{V}_R(M/R_1) = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \right]$

• Vitesse d'entraînement :  $\vec{V}_e(M, R_1/R) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$

$\vec{V}_e(M, R_1/R) = \omega \vec{e}_3 \wedge R \vec{e}_r = R \omega \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_r$

$\vec{e}_3 = -\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta$

$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\sin \theta \vec{e}_\chi$

d'où  $\left[ \vec{V}_e(M, R_1/R) = -R \omega \sin \theta \vec{e}_\chi \right]$

③ • accélération relative :  $\vec{a}_R(M/R_1) = \frac{d\vec{V}_R(M/R_1)}{dt}$

$\left[ \vec{a}_R(M/R_1) = -R \ddot{\theta} \vec{e}_r + R \dot{\theta}^2 \vec{e}_\theta \right]$

• accélération d'entraînement

$\vec{a}_e(M, R_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}}_{\vec{V}_e(M, R_1/R)} + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt} \wedge \vec{OM}$

$\vec{a}_e(M, R_1/R) = \omega \vec{e}_3 \wedge (-R \omega \sin \theta \vec{e}_\chi)$

$\vec{a}_e(M, R_1/R) = -R \omega^2 \sin \theta \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\chi$

or  $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\chi = -\cos \theta (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\chi) + \sin \theta (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\chi)$

$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\chi = \cos \theta \vec{e}_\theta + \sin \theta \vec{e}_r$

d'où  $\left[ \vec{a}_e(M, R_1/R) = -R \omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) \right]$

A. Daya



• Accélération de Coriolis  $\vec{a}_c(m, R_1/R) = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_R(m/R_1)$

$$\vec{a}_c(m, R_1/R) = 2\omega \vec{e}_3 \wedge R\dot{\theta} \vec{e}_\theta = 2R\omega\dot{\theta} \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\theta = (-\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\phi) \wedge \vec{e}_\theta = -\cos\theta \vec{e}_\phi$$

d'où  $\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega\dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\phi}$

(4-)  $R_1$  est un référentiel non galiléen, on doit ajouter aux forces extérieures des forces d'inertie.

- Poids du  $m \rightarrow \boxed{\vec{P} = mg \cos\theta \vec{e}_r - mg \sin\theta \vec{e}_\theta}$
- Reaction du cerceau  $\rightarrow \boxed{\vec{R} = R_r \vec{e}_r + R_\phi \vec{e}_\phi}$
- Force d'inertie d'entraînement  $\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(m, R_1/R) = mR\omega^2 \sin\theta (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)}$
- Force d'inertie de Coriolis  $\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(m, R_1/R) = 2mR\omega\dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\phi}$

(5-)  $\rightarrow$  RFD dans  $R_1 \rightarrow m\vec{a}_R(m/R_1) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

$$m(-R\ddot{\theta} \vec{e}_r + R\dot{\theta}^2 \vec{e}_\theta) = mg \cos\theta \vec{e}_r - mg \sin\theta \vec{e}_\theta + R_r \vec{e}_r + R_\phi \vec{e}_\phi + mR\omega^2 \sin\theta (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta) + 2mR\omega\dot{\theta} \cos\theta \vec{e}_\phi$$

%  $\vec{e}_\theta \rightarrow mR\ddot{\theta} = -mg \sin\theta + mR\omega^2 \sin\theta \cos\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \sin\theta \left( -\frac{g}{R} + \omega^2 \cos\theta \right)}$$

A. Doya

à l'équilibre  $\rightarrow \ddot{\theta} = 0 \rightarrow \sin \theta_e (-g/R + \omega^2 \cos \theta_e) = 0$

$\rightarrow \sin \theta_e = 0$  ou  $\cos \theta_e = g/R\omega^2$

$\left[ \theta_{e1} = 0 \text{ ou } \theta_{e2} = \pi \text{ ou } \theta_{e3} = \text{Arc}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) \right]$   
avec  $\omega > \sqrt{g/R}$

3 positions d'équilibre possibles

⑥ Étude de la stabilité

on pose  $\theta = \theta_e + \varepsilon \rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$

$\ddot{\theta} = \sin \theta (-g/R + \omega^2 \cos \theta)$

$\ddot{\varepsilon} = \sin(\theta_e + \varepsilon) \left[ -g/R + \omega^2 \cos(\theta_e + \varepsilon) \right]$

•  $\theta_{e1} = 0$

$\ddot{\varepsilon} = \sin \varepsilon \left[ -g/R + \omega^2 \cos \varepsilon \right]$

$\sin \varepsilon \approx \varepsilon$  et  $\cos \varepsilon \approx 1$

$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon (-g/R + \omega^2)$

$\left[ \ddot{\varepsilon} + (g/R - \omega^2) \varepsilon = 0 \right]$

$\rightarrow$  Pour  $\left[ \frac{g}{R} - \omega^2 > 0 \right]$  c.à.d.  $\frac{g}{R} > \omega^2$   
position stable et  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R - \omega^2}}$

$\rightarrow$  Pour  $\frac{g}{R} - \omega^2 < 0$  c.à.d.  $\frac{g}{R} < \omega^2$   
position instable.

•  $\theta_{e2} = \pi$   $\ddot{\varepsilon} = \sin(\pi + \varepsilon) \left[ -g/R + \omega^2 \cos(\pi + \varepsilon) \right]$

A. Doya

$$\sin(\pi + \epsilon) = -\sin \epsilon \approx -\epsilon$$

$$\cos(\pi + \epsilon) = -\cos \epsilon \approx -1$$

$$\text{Donc } \ddot{\epsilon} = -\epsilon \left( -g/R + \omega^2 \right)$$

$$\left[ \ddot{\epsilon} - (g/R + \omega^2) \epsilon = 0 \right]$$

$-(g/R + \omega^2) < 0 \rightarrow \theta_e = \pi$  position unstable.

•  $\theta_e = \arccos(g/R\omega^2)$   $\rightarrow \omega \theta_e = g/R\omega^2$

$$\ddot{\epsilon} = \sin(\theta_{e3} + \epsilon) \left[ -g/R + \omega^2 \cos(\theta_{e3} + \epsilon) \right]$$

$$\rightarrow \sin(\theta_{e3} + \epsilon) = \sin \theta_{e3} \cos \epsilon + \cos \theta_{e3} \sin \epsilon$$

$$\sin(\theta_{e3} + \epsilon) = \sin \theta_{e3} + \epsilon \cos \theta_{e3}$$

$$\rightarrow \cos(\theta_{e3} + \epsilon) = \cos \theta_{e3} \cos \epsilon - \sin \theta_{e3} \sin \epsilon$$

$$\cos(\theta_{e3} + \epsilon) = \cos \theta_{e3} - \epsilon \sin \theta_{e3}$$

$$\ddot{\epsilon} = \left[ \sin \theta_{e3} + \epsilon \cos \theta_{e3} \right] \left[ -g/R + \omega^2 (\cos \theta_{e3} - \epsilon \sin \theta_{e3}) \right]$$

$$\ddot{\epsilon} = (\sin \theta_{e3} + \epsilon \cos \theta_{e3}) (-\epsilon \omega^2 \sin \theta_{e3})$$

$$\ddot{\epsilon} = -\epsilon \omega^2 \sin^2 \theta_{e3} - \epsilon^2 \omega^2 \cos \theta_{e3} \sin \theta_{e3}$$

$\circ$  (ordre 2)

Donc  $\ddot{\epsilon} + \epsilon (\omega^2 \sin^2 \theta_{e3}) = 0$  on s'intéresse à l'ordre 1

$$\left[ \ddot{\epsilon} + (\omega^2 \sin^2 \theta_{e3}) \epsilon = 0 \right]$$

$\omega \theta_e = g/R\omega^2 \rightarrow$  position stable

$$\left[ T = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta_{e3}} \right]$$

A Daya  
90



⑦  $\cdot \delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = (mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta) R d\theta \vec{e}_\theta$   
 $\delta W(\vec{P}) = -mgR \sin \theta d\theta$

$$\left[ \delta W(\vec{P}) = d(mgR \cos \theta + \text{cte}_1) \right]$$

$\cdot \delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{OM} = R \vec{e}_r \cdot R d\theta \vec{e}_\theta = 0$

$$\left[ \delta W(\vec{R}) = d(\text{cte}_2) \right]$$

$\cdot \delta W(\vec{F}_{ic}) = \vec{F}_{ic} \cdot d\vec{OM} = -2R \omega^2 \cos \theta \vec{e}_r \cdot R d\theta \vec{e}_\theta = 0$

$$\left[ \delta W(\vec{F}_{ic}) = d(\text{cte}_3) \right]$$

$\cdot \delta W(\vec{F}_{ie}) = \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{OM} = mR\omega^2 \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) R d\theta \vec{e}_\theta$

$$\delta W(\vec{F}_{ie}) = mR^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\left[ \delta W(\vec{F}_{ie}) = d\left(\frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte}_4\right) \right]$$

⑧  $-dE_p(\theta) = \delta W(\vec{P}) + \delta W(\vec{R}) + \delta W(\vec{F}_{ic}) + \delta W(\vec{F}_{ie})$

$$-dE_p(\theta) = d(mgR \cos \theta + \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte})$$

avec  $\text{cte} = \text{cte}_1 + \text{cte}_2 + \text{cte}_3 + \text{cte}_4 = \text{cte}_{\text{pure}}$

$$-E_p(\theta) = mgR \cos \theta + \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte}$$

à  $\theta = 0 \rightarrow E_p(\theta) = 0 \rightarrow mgR + 0 + \text{cte} = 0$

$$\rightarrow \text{cte} = -mgR$$

d'où  $\left[ -E_p(\theta) = mgR(\cos \theta - 1) + \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta \right]$

Donc  $E_p(\theta) = mgR(1 - \cos\theta) - \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2\theta$

g- Position d'équilibre  $\frac{d}{d\theta} E_p(\theta) = 0$

$$\frac{d}{d\theta} E_p(\theta) = mgR \sin\theta - mR^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta = 0$$

$$mR(g \sin\theta - R\omega^2 \sin\theta \cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow mR \sin\theta (g - R\omega^2 \cos\theta) = 0$$

$$\rightarrow \sin\theta_e = 0 \text{ ou } \cos\theta_e = \frac{g}{R\omega^2}$$

$$\downarrow \left[ \theta_{e1} = 0 \text{ ou } \theta_{e2} = \pi \text{ ou } \theta_{e3} = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right) \right]$$

avec  $\frac{g}{R} < \omega^2$

$\exists$  position  $\Rightarrow$

$\omega < \frac{g}{R}$   $\rightarrow \frac{g}{R\omega^2} > 1 \rightarrow \theta_{e3}$  n'est pas possible

IL existe deux positions  $\Rightarrow$  possibles.

$$\theta_{e1} = 0 \text{ ou } \theta_{e2} = \pi$$

$\rightarrow$  stabilité  $\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) = mgR \cos\theta - mR^2 \omega^2 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\theta_{e1} = 0$   $\rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta_e=0) = mgR - mR^2 \omega^2 = mR^2 \left( \frac{g}{R} - \omega^2 \right)$

$$\theta_{e1} = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/R - \omega^2}}$$

$\theta_{e1} = 0$  position stable

$\theta_{e2} = \pi$   $\rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) = -mgR - mR^2 \omega^2 < 0$

$$\theta_{e2} = \pi$$

$\theta_{e2} = \pi$  position instable

A. Days

$$\bullet \underline{\omega^2 > g/R} \rightarrow g/R\omega^2 < 1$$

on a 3 positions d'équilibre

$$\left| \begin{array}{l} \theta_{e1} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{e2} = \pi \\ \text{ou} \\ \theta_{e3} = \arccos(g/R\omega^2) \end{array} \right.$$

→ stabilité

$$\bullet \underline{\theta_{e1} = 0} \rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) \Big|_{\theta_{e1}=0} = mR^2(g/R - \omega^2) < 0$$

$\theta_{e1}=0 \rightarrow$  position instable.

$$\bullet \underline{\theta_{e2} = \pi} \rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) \Big|_{\theta_{e2}=\pi} = -mR^2(g/R + \omega^2) < 0$$

$\theta_{e2}=\pi \rightarrow$  position instable

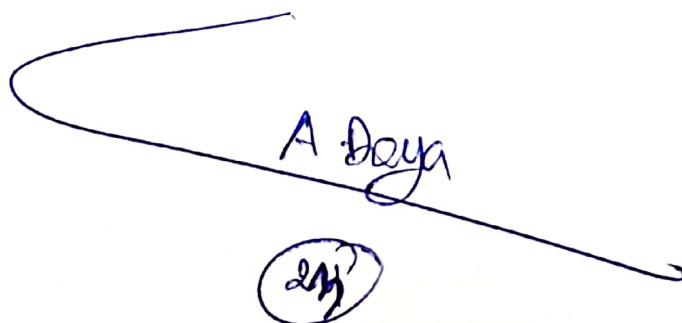
$$\bullet \underline{\theta_{e3} = \arccos(g/R\omega^2)} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} E_p(\theta) \Big|_{\theta_{e3}} &= mgR \cos \theta_{e3} - mR^2 \omega^2 \cos^2 \theta_{e3} + mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta_{e3} \\ &= mgR \cdot \frac{g}{R\omega^2} - mR^2 \omega^2 \frac{g^2}{R^2 \omega^4} + mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta_{e3} \end{aligned}$$

$$= mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta_{e3} > 0$$

$\theta_{e3} = \arccos g/R\omega^2$  position stable

$$\left[ T = \frac{2\pi}{\omega \sin \theta_e} \right]$$





## OPTIQUE GEOMETRIQUE

### Série N° 4 : Optique Géométrique

A. Daya

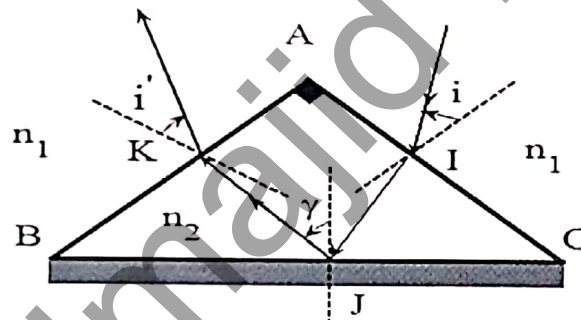
#### Exercice 1

Soit un prisme ABC rectangle en B d'indice  $n = 1,5$ . Les angles en A et C valent respectivement  $30^\circ$  et  $60^\circ$ .

1. Tracer la marche d'un rayon lumineux normal à la face AB.
2. Déterminer la déviation  $D$  du rayon lumineux normal à la face AB.
3. Tracer la marche d'un rayon lumineux normal à la face BC.
4. Déterminer la déviation  $D$  du rayon lumineux normal à la face BC.

#### Exercice 2

On considère un prisme d'indice  $n_2$ , isocèle, dont l'angle au sommet est droit et sa base argentée (miroir). Ce prisme baigne dans un milieu d'indice  $n_1$ .



On suppose que l'indice  $n_1 = 1$ . Sachant que  $i = \frac{\pi}{3}$

1. Déterminer l'indice  $n_2$  en fonction de  $i$  et  $\gamma$ .
2. Déterminer l'angle de déviation  $D$ .
3. Calculer  $n_2$  et  $D$  lorsque  $\gamma = 0$ .

#### Exercice 3

Un miroir sphérique concave à pour rayon de courbure  $R = 0,4$  m.

1. Rappeler les formules de conjugaison d'un miroir sphérique avec origine au centre et avec origine au sommet.
2. Un objet réel  $AB$  de petite dimension est placé perpendiculairement à l'axe optique à 30 cm en avant du sommet  $S$  du miroir.
  - 2.1. Déterminer la position de l'image  $A'B'$  et son grandissement.
  - 2.2. Construire l'image  $A'B'$  en choisissant une échelle convenable.
3. Un objet virtuel  $AB$  est maintenant placé à 0,3 m en arrière du miroir.
  - 3.1. Déterminer la position de l'image  $A'B'$  et son grandissement.
  - 3.2. Construire l'image  $A'B'$  en choisissant une échelle convenable.

#### Exercice 4

Un miroir **sphérique** de centre **C**, de sommet **S** à pour **rayon** de courbure  $R = \overline{SC} = 10m$ .

1. Le miroir est-il **convexe** ou **concave** ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer les positions de foyers **F** et **F'** par rapport au sommet **S** et en déduire les distances focales  $f$  et  $f'$  du miroir.
3. Calculer la **vergence**  $V$  du miroir.
4. Le miroir est-il **convergent** ou **divergent** ? Justifier votre réponse.
5. Où faut-il placer l'**objet**  $AB$  de telle façon que son grandissement  $\gamma = \frac{1}{5}$
6. Déterminer la position de l'**image**  $A'B'$  par rapport au sommet **S**.
7. Un **objet réel**  $AB$  de hauteur  $\overline{AB} = 5m$  situé en **A** perpendiculairement à l'axe optique. Quelle est la taille, le sens et la nature de l'image  $A'B'$  ?
8. Construire l'**image**  $A'B'$  en choisissant une échelle convenable.

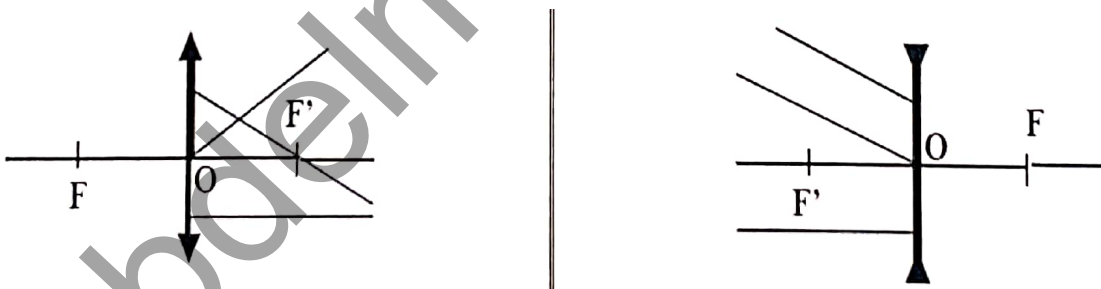
#### Exercice 5

On place **objet réel**  $AB$  de hauteur  $\overline{AB} = 1cm$  à **20cm** du centre optique d'une **lentille mince convergente**  $L$ , perpendiculairement à l'axe optique. On obtient une **image réelle**  $A'B'$  à **80cm** de la lentille  $L$ .

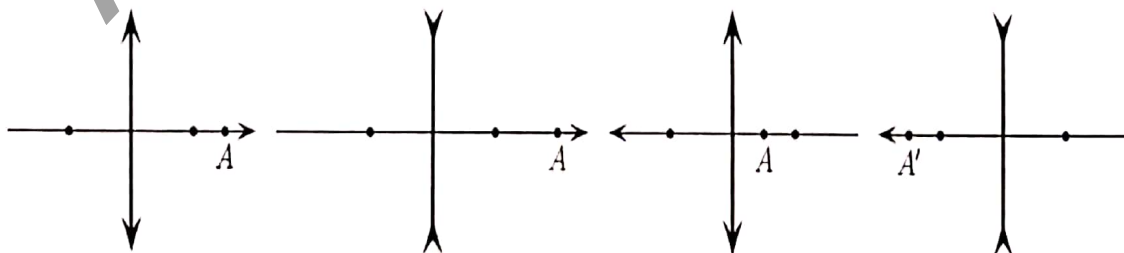
1. Déterminer la distance focale  $f'$  de la lentille  $L$ .
2. Déterminer le **grandissement**  $\gamma$  et la dimension de l'**image**  $A'B'$
3. Construire l'**image**  $A'B'$  en choisissant une échelle convenable.

#### Exercice 6

1. Compléter les rayons émergents ou incidents manquants à chacun des schémas suivants :



2. Pour chacune des figures, déterminer la **position de l'objet**  $A$  ou de son **image**  $A'$  par la lentille mince. Les points situés sur l'axe optique sont les foyers de la lentille.

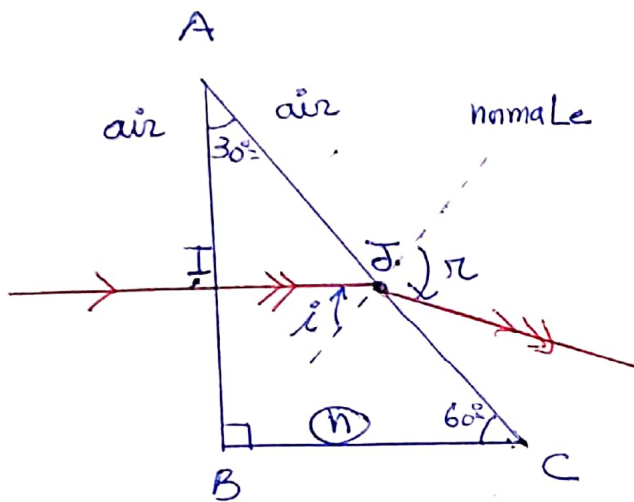


# Correction Série N°4

## OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

### Exercice 1

1-



- en I : le rayon incident tombe normale sur la face (AB)  $\Rightarrow$  le rayon n'est pas réfracté, reste normale jusqu'à le point D

- en D : Pour savoir sa déviation, il faut calculer l'angle limite  $i_c$ .

- le triangle (AID), permet de calculer  $i^\circ$

$$\hat{A} + \hat{I} + \hat{D} = 180^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + (90^\circ - i^\circ) = 180^\circ \Rightarrow [i^\circ = 30^\circ]$$

- l'angle limite est :  $n \sin i_c = \sin \pi/2 = 1$

$$\sin i_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{1,5} \Rightarrow [i_c = 41^\circ 8']$$

on constate que  $i_c > i \Rightarrow$  on aura une réfraction sur la face AC

- Le rayon réfracté permet de calculer l'angle de réfraction  $r$

$$n \sin i = \sin r$$

$$r = \text{Arcsen}(n \sin i) = \text{Arcsen}(1,5 \sin 30^\circ)$$

$$[r = 48^\circ 6']$$

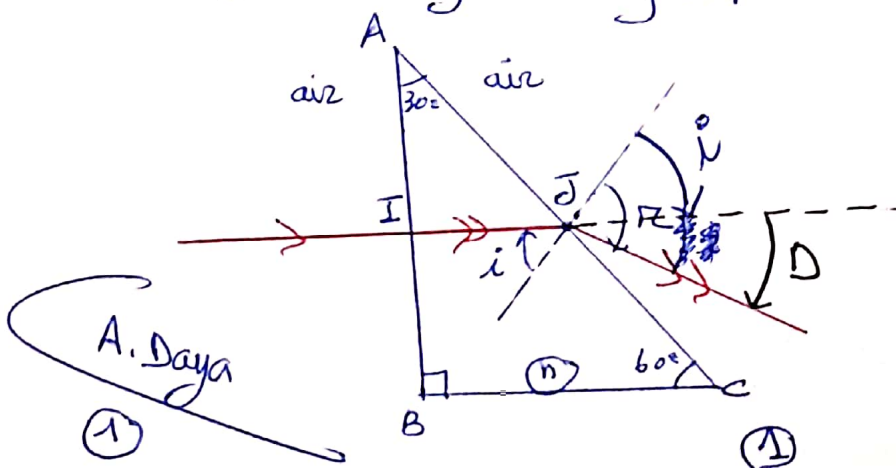
2-

Déviation D est l'angle que forme le rayon incident avec le rayon émergent

$$D = D_D = r - i$$

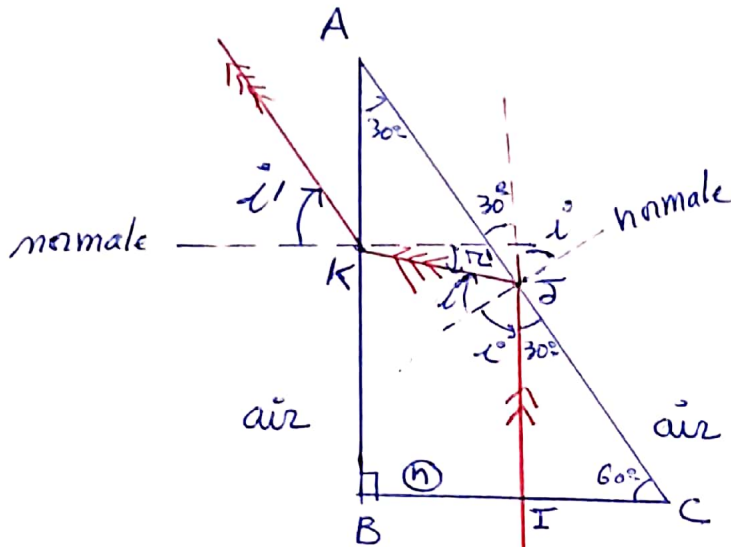
$$D = 48^\circ 6' - 30^\circ$$

$$[D = 18^\circ 6']$$





3-



• en I, le rayon incident normale à la face BC, soit normale ( $\perp$ ) à la face BC jusqu'à le point J.

• en J, on doit calculer l'angle limite  $i_e$ .

• Le triangle  $(\hat{J}IC)$   $\rightarrow (90^\circ - i) + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ$   
 $\rightarrow [i = 60^\circ]$

• L'angle limite  $i_e \rightarrow \sin i_e = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.5} \rightarrow [i_e = 41^\circ 8']$

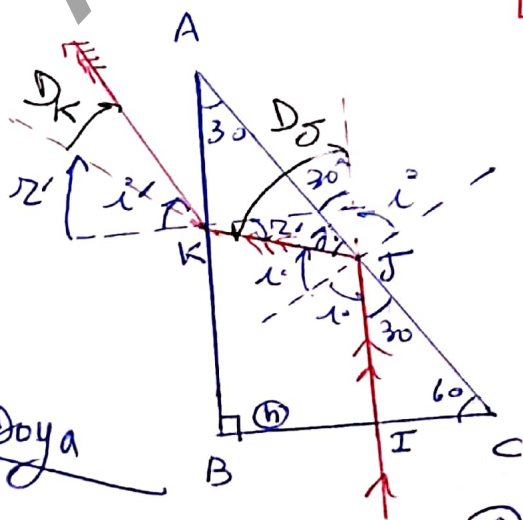
on constate que  $i_e < i \Rightarrow$  on aura une réflexion totale sur AC

• Le triangle  $(AKJ)$   $\rightarrow 30^\circ + (90^\circ + r') + (180^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 30^\circ) = 180^\circ$   
 $[r' = 30^\circ]$

on constate que  $i_e > r' \Rightarrow$  on aura une réfraction sur AB

•  $n \sin r' = \sin i' \rightarrow i' = \text{Arcsen}(n \sin r') =$   
 $[i' = 48^\circ 6']$

4-



•  $D = D_J + D_K$

$\rightarrow D_J = 30^\circ + j$   
 $i + 30^\circ + j + i' = 180^\circ$   
 $j = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$

$[D_J = 60^\circ]$

•  $[D_K = i' - r' = 18^\circ 6']$

donc  $[D = 78^\circ 6']$

A. Doya

②

②

## Exercice 2

①

•  $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ,  $n_1 = 1$

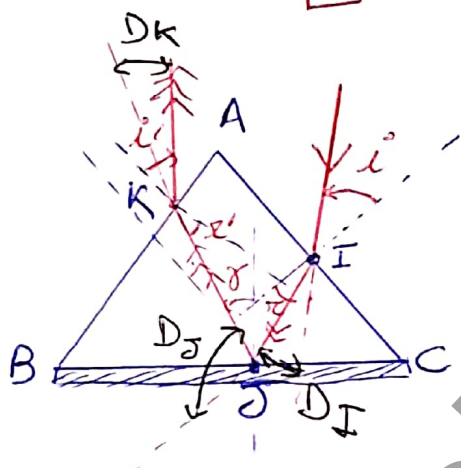
• le triangle  $(I \Delta C) \rightarrow (90^\circ - r) + 45^\circ + (90^\circ - \gamma) = 180^\circ$

$$\rightarrow \left[ r = 45^\circ - \gamma = \frac{\pi}{4} - \gamma \right]$$

d'où

$$\left[ n_2 = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i}{\sin(\frac{\pi}{4} - \gamma)} \right]$$

②



•  $\Delta = DI + DJ + DK$

$DI = i - r$

$DJ = \pi - 2\gamma$

$DK = i' - r'$

• triangle  $(I \Delta C) \rightarrow r = \frac{\pi}{4} - \gamma$

• triangle  $(K \Delta B) \rightarrow r' = \frac{\pi}{4} - \gamma$

$\Rightarrow r = r'$

or  $r = r' \Rightarrow i = i' \Rightarrow DI = DK$

d'où  $\Delta = 2DI + DJ = 2i - 2r + \pi - 2\gamma$

$\Delta = 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \pi - 2\gamma$

$$\left[ \Delta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi \right]$$

③

A.N

$\gamma = 0 \rightarrow$

$$\left[ \begin{array}{l} n_2 = 0,81 \\ \Delta = 210^\circ \end{array} \right]$$

A. Daya

③

## Exercice 3

- ①. Les formules de conjugaison d'un miroir sphérique avec  
→ origine au centre

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}$$

→ origine au sommet

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{AB}}$$

avec  $A'$  point d'image,  $c$ : centre,  $\gamma$ : le grossissement  
 $A$  point objet,  $s$ : sommet

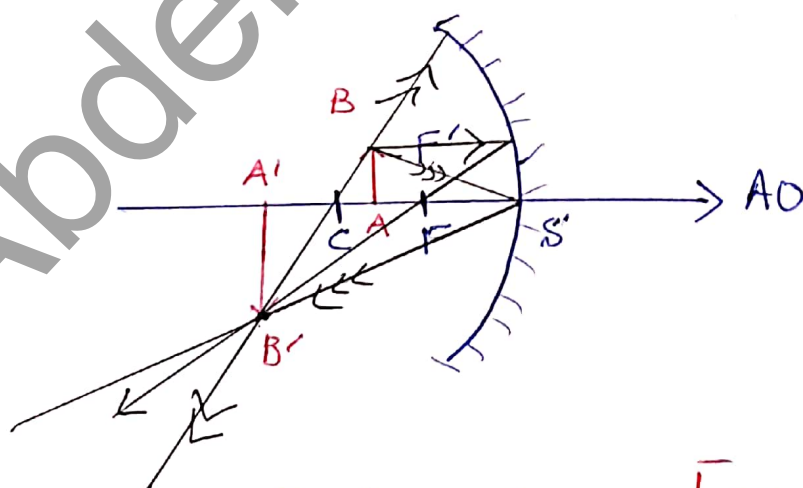
- ②. Miroir concave →  $R = \overline{SC} < 0 \rightarrow R = \overline{SC} = -0,4\text{m}$   
 $[R = \overline{SC} = -40\text{cm}]$

•  $AB$  est devant du sommet  $S$  du miroir →  $[\overline{SA} = -30\text{cm}]$

②.1

$$\left| \begin{array}{l} \overline{SA'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}} \\ \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \end{array} \right. \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \overline{SA'} = -60\text{cm} \\ \gamma = -2 \end{array} \right]$$

②.2



$$\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF'}$$

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = -20\text{cm}$$

- ③.  $AB$  est en arrière du miroir →  $[\overline{SA} = 30\text{cm}]$

③.1

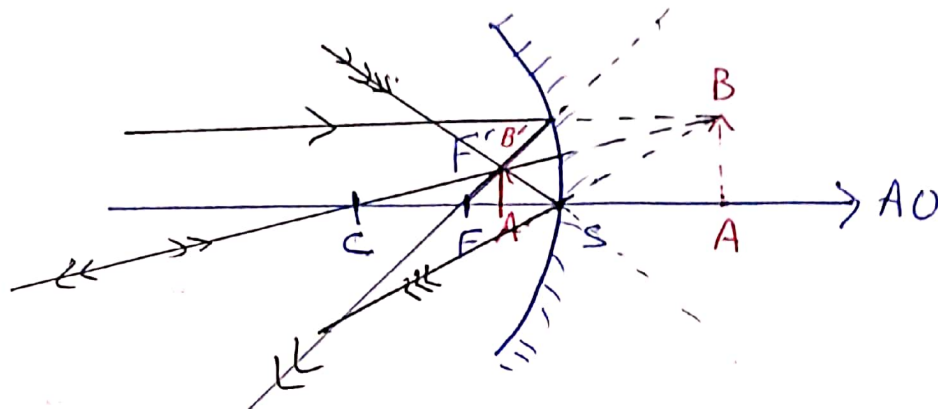
$$\left| \begin{array}{l} \overline{SA'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}} \\ \gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \end{array} \right. \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \overline{SA'} = -12\text{cm} \\ \gamma = 0,4 \end{array} \right]$$

④

A. Daya



3.2



### Exercice 4

① Le miroir est convexe car son rayon  $R = \overline{SC} = 10 \text{ m}$  est positif.

② •  $\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$  : position du foyer objet F et de foyer image F'

•  $f = f' = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF}$  : les distances focales f et f' sont égales

$$\boxed{f = f' = \overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2} = 5 \text{ m}}$$

③ La vergence du miroir sphérique est de finipax :  $V = \frac{1}{f}$  S ou m<sup>-1</sup>

④ Miroir convexe  $\rightarrow R > 0 \rightarrow$  Miroir divergent.

⑤ •  $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2} \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right)}$$

AN  $\boxed{\overline{SA} = -20 \text{ m}}$

⑥ On a :  $\overline{SA'} = -\gamma \overline{SA} \rightarrow$  AN  $\boxed{\overline{SA'} = 4 \text{ m}}$

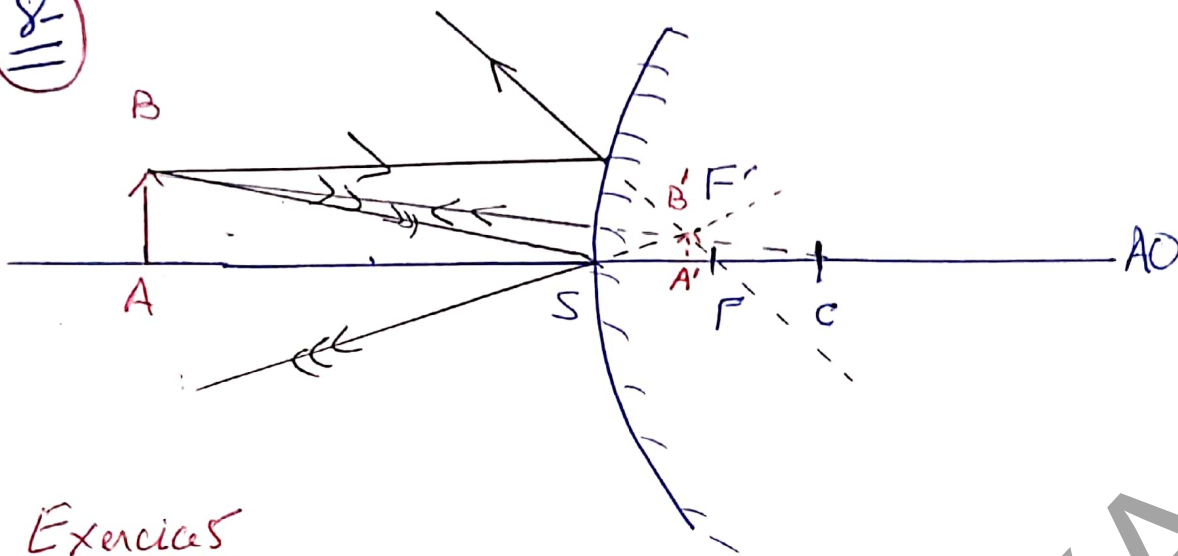
⑦  $\overline{A'B'} = +\gamma \overline{AB} \rightarrow$  AN  $\boxed{\overline{A'B'} = 1 \text{ m.}}$

L'image A'B' a une taille de 1 m, même sens que l'objet droite et elle est virtuelle

A. Jaja.

⑤

8-  
=



## Exercices

1- formule de conjugaison de la lentille mince

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\left[ f' = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}} \right]$$

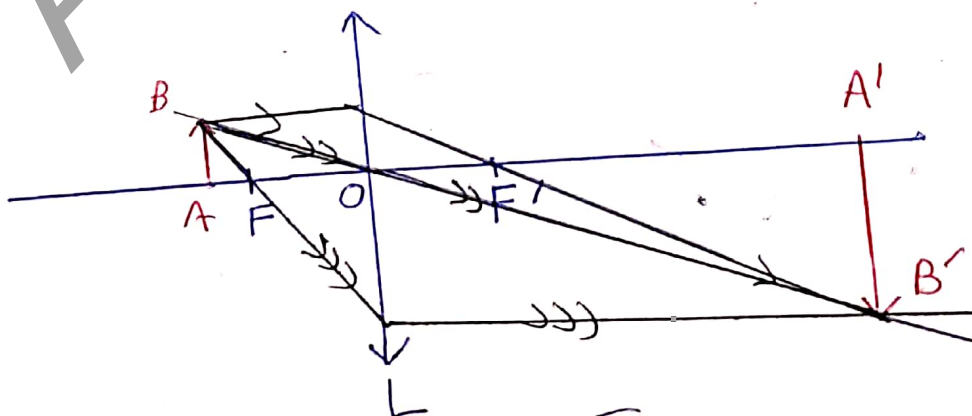
AN  $\overline{OA} = -20 \text{ cm}$ ,  $\overline{OA'} = 80 \text{ cm} \rightarrow \left[ f' = 16 \text{ cm} \right]$

2- le grossissement  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

$$\rightarrow \left[ \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \text{ et } \overline{A'B'} = \gamma \cdot \overline{AB} \right]$$

AN  $\left[ \gamma = -4 \text{ et } \overline{A'B'} = -4 \text{ cm} \right]$

3-  
=

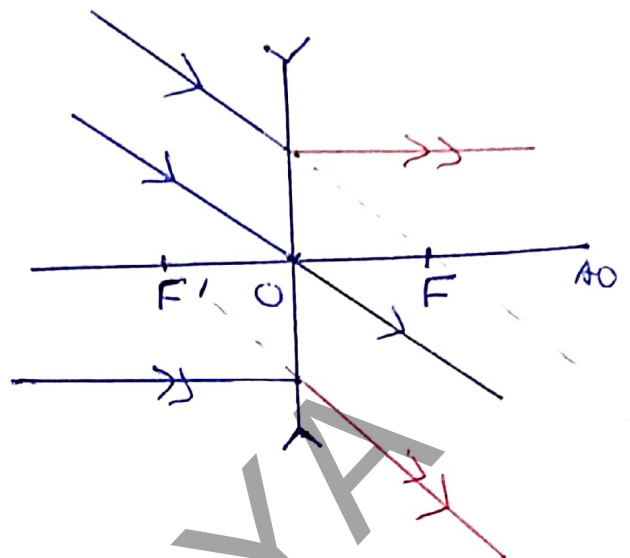
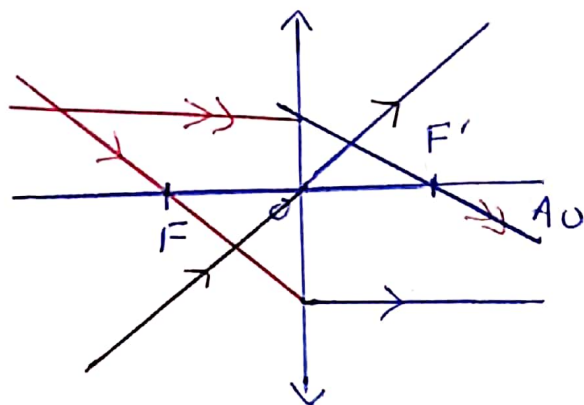


A. B. Daya.

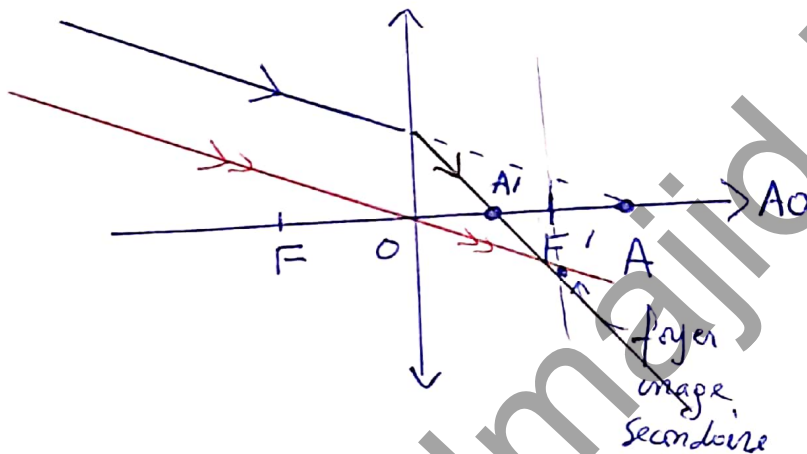
6

# Exercice 6

1-



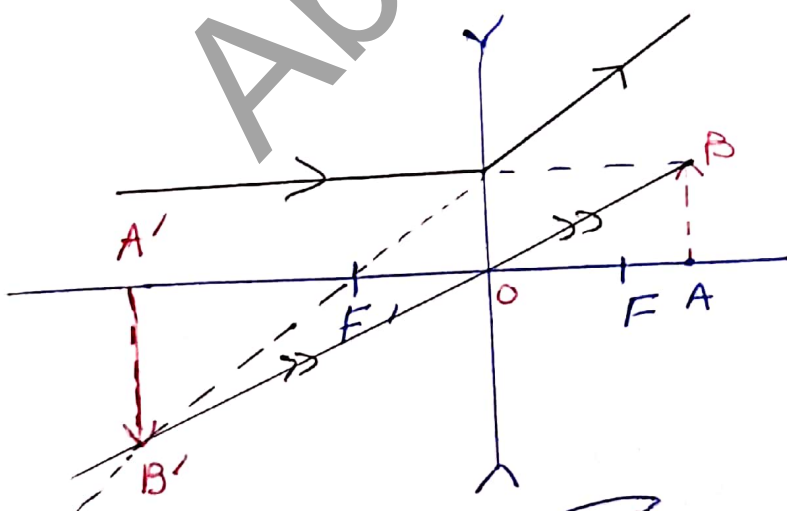
2-



A: objet virtuel. se trouve sur l'axe optique, son image  $A'$  se trouve aussi sur l'axe optique.

- on trace un rayon passant par A et on utilise un rayon // à A passant par le centre optique O
- on aura un nouveau foyer image secondaire.

$A'$  est une image réelle



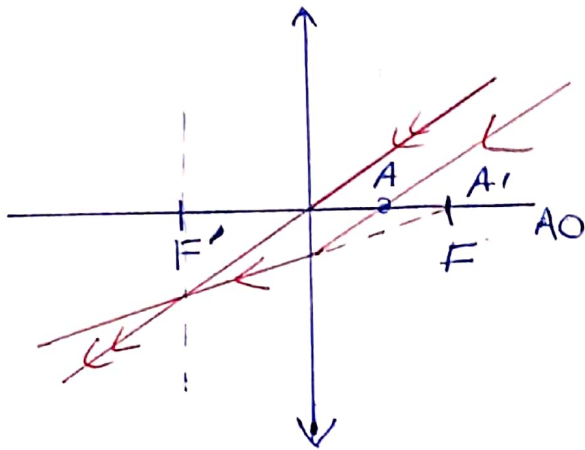
- on utilise un objet AB ( $\perp$  AO) perpendiculaire à l'axe optique (AO), on cherche l'image  $B'$  de B et en déduit la position de  $A'$

A: objet virtuel  
 $A'$ : image virtuelle

A. Doy 9

(7)

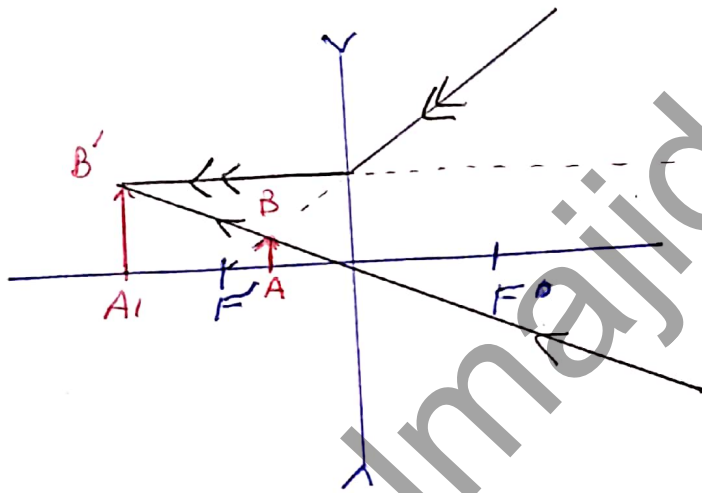




• la lumière incidente vient de droite à gauche, il faut penser au position des foyers image et objet de la lentille

A: objet réel

A': image virtuelle on fondue au foyer objet



• A: objet ~~virtuel~~ réel

• A': image virtuelle.

Abdelmajid DAYA

fin.

optique géométrique

A. Daya